

DIPLOMARBEIT

dE/dx in Halbleiterdetektoren

ausgeführt am
Institut für Hochenergiephysik
der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
und am
Institut für Kernphysik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.-Prof. DI Dr. Meinhard Regler
und
Univ.-Doz. DI Dr. Manfred Krammer

durch

Matthias Winkler

Engelsdorferweg 13
3730 Eggenburg

Wien, am 11. September 1998

Zusammenfassung der Diplomarbeit

Folgenden Fragen und Aufgabenstellungen sollte in dieser Diplomarbeit nachgegangen werden:

- Eine gründliche Durcharbeit der Literatur sollte die Grundlage bilden und mit dem Thema vertraut machen. Speziell wurde nach vorhandenen Arbeiten über dE/dx in Silizium gesucht.
- Mit dem Wissen aus der Literatur sollte der Energieverlust in Silizium und speziell dE/dx in Silizium Halbleiterdetektoren untersucht werden. Von großem Interesse war die Frage nach dem Plateau im Hochenergiebereich, dem Punkt mit der kleinsten Ionisation der Teilchen (MIP - **M**inimum **I**onizing **P**article) und dem Verhältnis von Plateau zu MIP (Höhe des Plateaus). Direkt damit verbunden ist die Frage, ob man mit der „ dE/dx - Methode“ zwischen MIP und Plateau („relativistic rise“) Teilchenidentifizierung machen kann.
- Im Rahmen der Überprüfung erfolgte die Mitarbeit an zwei Tests von Silizium Halbleiterdetektoren:
 - Beim PSI97 Test am Paul Scherrer Institutsoll das Verhalten von niederenergetischen Teilchen („low - energy particles“) untersucht werden, welche unter verschiedenen Winkeln auf den CMS - Detektor (**C**ompact **M**uon **S**olenoid) auftreffen. Da der Test noch mit einer herkömmlichen rauscharmen („low - noise“) LEP Elektronik (**L**arge **E**lektron **P**roton **C**ollider) durchgeführt wurde, wurde mit den bestehenden Daten eine „high noise“ Simulation durchgeführt, um Aussagen über das Verhalten dieser Teilchen in einem strahlungsgeschädigten Detektor mit schneller Elektronik treffen zu können. Bei diesem Test wurde im Rahmen dieser Diplomarbeit bei der Datenanalyse mitgearbeitet, mit dem Hauptaugenmerk auf der „high - noise“ Simulation.
 - Beim APV6 Test wurde erstmals ein Silizium Streifendetektor mit einem APV6 Auslesechip getestet. Dieser APV6 wird bei CMS zum Einsatz kommen, da er eine strahlungsfeste Architektur und die nötige Integrationszeit von Daten besitzt. Bei diesem Test wurde im Rahmen der Diplomarbeit beim experimentellen Aufbau (CERN), der Datennahme und der Datenanalyse mitgewirkt.
- Ein wichtiger Punkt war die Verifizierung der erhaltenen experimentellen Daten durch die theoretischen Voraussagen.

Die Ableitungen für den Energieverlust in dieser Diplomarbeit gelten nur für schwere geladene Teilchen, genauso wie die sich daraus ergebenden Folgerungen. Die Diplomarbeit ist in drei Abschnitte gegliedert:

- Das erste Kapitel soll die theoretischen Grundlagen für den Energieverlust bilden, wobei in Kapitel (1.6) konkret auf dE/dx in Silizium und auf die Frage nach dem Plateau in Kapitel (1.6.2) eingegangen wird.
- Im zweiten und dritten Kapitel sollen der Aufbau und die Ergebnisse aus zwei Tests mit Silizium Streifendetektoren gezeigt werden.
- Im vierten Kapitel sollen schließlich die Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln miteinander verglichen werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie des Energieverlustes	6
1.1	Einleitung	6
1.1.1	Fundamentale Wechselwirkungen	7
1.1.2	dE/dx in Gasdetektoren	8
1.2	Das klassische Modell (Bohr)	10
1.2.1	Harmonisch gebundene Ladung	15
1.2.2	Elastische Streuung und mittlerer quadratischer Streuwinkel	15
1.2.3	Schlußfolgerungen zum klassischen Modell	21
1.3	Das quantenmechanische Modell (Bethe, Bloch)	21
1.3.1	Der differentielle Wirkungsquerschnitt	21
1.3.2	Inelastische Streuung im quantenmechanischen Modell . .	23
1.3.3	Die Bethe - Formel für den Energieverlust	26
1.3.4	Die Bethe - Bloch Formel (relativistische Q.M.)	28
1.3.5	Eigenschaften der Bethe - Bloch Formel	31
1.3.6	Verhalten der Bethe - Bloch Formel bei hohen Teilchenge- schwindigkeiten	36
1.3.7	Vielfachstreuung (Multiple Coulomb Scattering)	37
1.4	Die Energieverlustverteilung (Landau, Vavilov)	39
1.4.1	Dicke Absorber: Die Gaußverteilung als Grenzfall	39
1.4.2	Dünne Absorber: Die Landauverteilung	40
1.4.3	Mathematische Eigenschaften der Landauverteilung	42
1.5	Zusammenfassung: Energieverlust	45
1.5.1	Vergleich Bohr, Bethe, Bloch	45
1.5.2	Energieverlustverteilung	46
1.6	Energieverlust in Silizium Halbleiterdetektoren	48
1.6.1	Berechnete dE/dx Werte in Silizium	48
1.6.2	„Restricted Energy Loss“ bei dünnen Detektoren	51
1.6.3	Channeling	57
2	Experimenteller Aufbau	59
2.1	Der CMS Detektor	59
2.2	Aufbau eines Silizium Streifendetektors	61
2.3	PSI97 Test	62
2.3.1	Einleitung	62
2.3.2	Experimenteller Aufbau	62
2.4	APV6 - Silizium System Test	62
2.4.1	Experimenteller Aufbau	64
3	Datenauswertung von Siliziumdetektoren	66
3.1	PSI97 Test	66
3.1.1	Datenanalyse	66

3.1.2	Ergebnisse	68
3.1.3	High - Noise Simulation	80
3.1.4	Zusammenfassung der Ergebnisse	90
3.2	APV6 - Silizium System Test	91
3.2.1	Datenanalyse und Ergebnisse	91
3.2.2	Zusammenfassung der Ergebnisse	95
4	Diskussion der Ergebnisse von dE/dx	98
4.1	PSI97 Test	98
4.2	APV6 - Silizium System	100
4.3	Schlußfolgerung zu dE/dx in Silizium	104
	Literatur	106

1 Theorie des Energieverlustes

1.1 Einleitung

Die genauen Kenntnisse der Effekte, die beim Durchgang von Strahlung durch Materie auftreten, sind notwendig, da sie die Grundlagen der prinzipiellen Funktionsweisen von Detektoren bilden und auch bei der Bestimmung ihrer Leistungsfähigkeit eine Rolle spielen. Wichtig sind diese Kenntnisse auch im Strahlenschutz, wo es darauf ankommt, Personen, die mit radioaktiven Quellen oder mit Teilchenstrahlen arbeiten, zu schützen. Man unterscheidet grundsätzlich drei Arten von Strahlung:

- geladene Teilchen
- Photonen
- neutrale Hadronen

Der Energieverlust einfallender Teilchen in einem Absorbermaterial tritt auf durch Wechselwirkungen dieser Teilchen mit den Atomen des Absorbermaterials. Dabei wird ein Teil der Energie des einfallenden Teilchens durch Wechselwirkung auf die Atome des Absorbermaterials übertragen. Der Energieverlust wird dabei als differentielle Größe $-\frac{dE}{dx}$ - also die infinitesimale Energieänderung pro infinitesimalem Wegelement - angegeben. Daraus berechnen sich dann die abgegebene Energie ΔE des einfallenden Teilchens in einem Absorbermaterial der Dicke Δx und die Reichweite eines Teilchens der Energie E in einem bestimmten Absorbermaterial.

So erfolgt zum Beispiel der *Teilchennachweis* in einem Detektor durch

- die Erzeugung eines *registrierbaren Signales* durch die Wechselwirkung des nachzuweisenden Teilchens mit dem Detektormaterial,

und / oder

- indirekt über die Zerfallsprodukte des Teilchens.

Das Ziel des Teilchennachweises ist oft die *Teilchenidentifikation*, also

- den Impuls,
- die Energie,
- die Teilchenart und
- die Lebensdauer

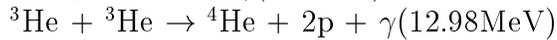
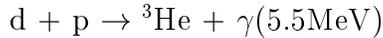
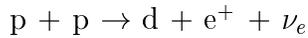
eines Teilchens experimentell zu bestimmen.

Mit der sogenannten dE/dx - Methode können Teilchen gleichen Impulses unterschieden werden, wenn sie sich innerhalb eines bestimmten Energieintervalles befinden (Energie unterhalb der minimalen Ionisation). Da der Energieverlust eine Funktion der Geschwindigkeit der Teilchen ist, kann mit der Messung des Energieverlustes auf die Geschwindigkeit des Teilchens rückgeschlossen werden und damit indirekt auf die Masse des selben (bei bekanntem Energieverlust und Impuls). Teilchen mit gleichem Impuls aber unterschiedlicher Masse können dadurch in einem bestimmten Bereich problemlos voneinander unterschieden werden. Was in Gasdetektoren bereits seit längerem praktiziert wird, soll nun auch in Siliziumdetektoren seine Anwendung finden. Daher sind genaue Kenntnisse des Energieverlustes in diesen Materialien notwendig. Bis heute wurden die Energieverlustkurven in Silizium im Hochenergiebereich noch nicht systematisch gemessen. Es gibt wohl genaue theoretische Vorhersagen, auf die später noch genauer eingegangen werden wird.

1.1.1 Fundamentale Wechselwirkungen

Im Standardmodell werden die heute bekannten Kräfte auf vier fundamentale Wechselwirkungen zurückgeführt. Die Übermittlung der Wechselwirkungen führt man auf Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin) zurück.

- Die *elektromagnetische Wechselwirkung* ist die dominierende Kraft in unserem täglichen Leben. Als Überträger dieser Wechselwirkung dient das Photon. Grundsätzlich nehmen alle geladenen Teilchen an der elektromagnetischen Wechselwirkung teil. Beispiele elektromagnetischer Wechselwirkungen sind:
 - Geladene Teilchen treffen auf Materie:
 - * Streuung an Atomen, Anregung und Ionisation von Atomen
 - * Bremsstrahlung (Bis zu Energien von einigen $\sim 100\text{GeV}$ ist die Bremsstrahlung als Form des Energieverlustes nur bei Elektronen und Positronen von Bedeutung.)
 - * Cherenkov - Strahlung
 - * Übergangsstrahlung
 - Photonen treffen auf Materie:
 - * Photoeffekt
 - * Comptoneffekt
 - * Paarbildung
- Die *schwache Wechselwirkung* wurde erst sehr spät entdeckt und ist unter anderem für den Energiehaushalt der Sonne verantwortlich:



Als Überträger der schwachen Kraft dienen die drei massiven Vektorbosonen (Z^0 , W^\pm).

- Die *starke Wechselwirkung* beschreibt Kernreaktionen. Neutrale Teilchen wie das Neutron oder das π^0 Meson können nur über Kernreaktionen direkt nachgewiesen werden. Als Austauschteilchen dienen die Gluonen, die als Farb-Antifarbkombination dreier Farbzustände (Quantenzahlen) auftreten¹.
- Die *Gravitation* ist die am längsten bekannte Wechselwirkung. Wegen dem sehr kleinen Wert der Gravitationskonstante spielt sie aber erst bei größeren Massenanhäufungen (Planeten, Sterne, Galaxien) eine Rolle. Als Übermittlerteilchen vermutet man das Graviton, ein masseloses Spin-2 Teilchen.

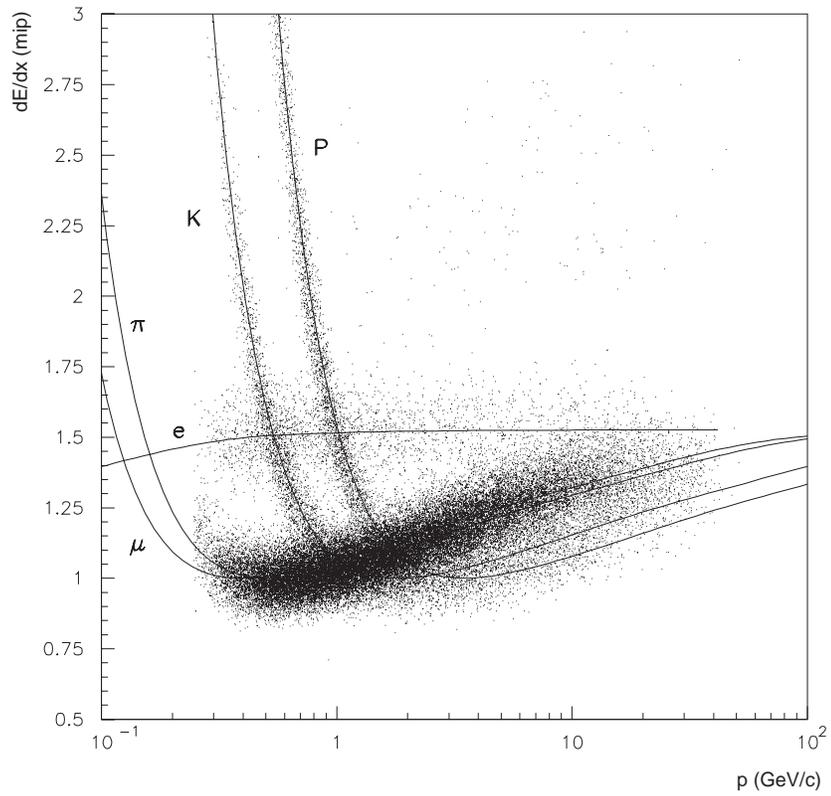
Die aktuelle Forschung auf diesem Gebiet hat zum Ziel, diese vier Wechselwirkungen auf eine „Ur - Kraft“ zurückzuführen. Während es bereits gelungen ist, die elektromagnetische mit der schwachen Wechselwirkung zur *elektroschwachen* Wechselwirkung zu vereinen², und das Standardmodell die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung im heute zugänglichen Energiebereich in Großbeschleunigern vereint, existiert noch keine experimentell gesicherte Theorie, die alle vier Wechselwirkungen zu einer einzigen vereinheitlicht.

1.1.2 dE/dx in Gasdetektoren

In großen Gasdetektoren ist die dE/dx Methode seit längerem ein bewährtes Mittel, um Teilchen mit gleichem Impuls aber unterschiedlicher Masse und Geschwindigkeit voneinander unterscheiden zu können[1]. Typische Energieverlustkurven sehen in der Praxis wie in Abb.(1) aus. Es soll vorweggenommen werden, daß das Plateau in Silizium Streifendetektoren dadurch entsteht, daß hochenergetische knock - on oder δ Elektronen aus dem Detektor entweichen und kein Signal im Detektor mehr erzeugen können. In der TPC entsteht das Plateau dadurch, daß durch die Größe der dE/dx - Elektroden im Detektor nur ein Teil des Signals entlang der Spur des Teilchens aufgefangen werden kann. δ Elektronen, die daran vorbei schießen, können damit nicht mehr gemessen werden, obwohl auch sie zum erzeugten Signal gehören.

¹Mit „Farbe“ bezeichnet man den Quantenzustand der Quarks. Quarks können drei verschiedene Quantenzustände annehmen: rot, grün und blau.

²Ähnlich J.C. Maxwell, der Mitte des vorigen Jahrhunderts die Elektrizität und den Magnetismus zur Theorie des Elektromagnetismus vereinte.

Abbildung 1: dE/dx Kurven in der TPC bei DELPHI.

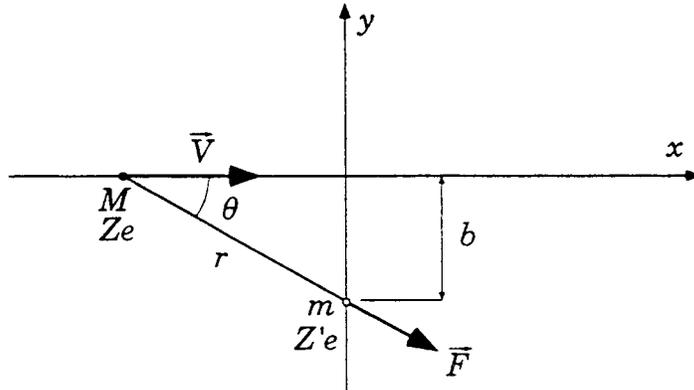


Abbildung 2: Einfallendes Teilchen der Masse M und einem Stoßparameter b bezüglich dem Elektron der Masse m .

1.2 Das klassische Modell (Bohr)

Bei der Herleitung der klassischen Formel für den Energieverlust (Bohr 1915) trifft man folgende Grundannahmen:

- Die Geschwindigkeit des Teilchens ist groß gegenüber der Bahngeschwindigkeit des Hüllenelektrons, so daß das Elektron als ruhend und während des Stoßes als frei betrachtet werden kann.
- Die Masse des Teilchens ist groß gegenüber der Masse des Elektrons.
- Der Impulsübertrag Δp ist so klein, daß das einfallende Teilchen von seiner geradlinigen Bahn nicht abgelenkt wird, und daß sich das Rückstoßelektron während des Stoßes kaum bewegt.
- Das magnetische Feld ist von geringer Bedeutung, da sich das Elektron in Ruhe befinden soll.

Die Geometrie des Stoßprozesses ist in Abb.(2) dargestellt.

Um den auf das Elektron übertragenen Impuls zu berechnen, zerlegt man zunächst die Coulombkraft \mathbf{F} in einen Anteil parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung des einfallenden Teilchens:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\parallel} \\ F_{\perp} \end{pmatrix}$$

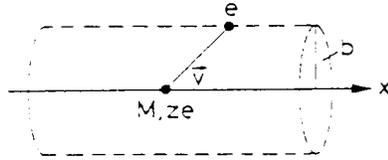


Abbildung 3: Geometrie zum Gauss'schen Gesetz.

Aus Symmetrieüberlegungen folgt, daß die parallele Komponente keinen Beitrag zum Gesamtimpulsübertrag liefert:

$$I_x = \int_{-\infty}^{\infty} F_x dt = 0. \quad (1)$$

Anschaulich läßt sich dies damit erklären, daß das Teilchen durch die elektrische Anziehung in x-Richtung um genau den selben Betrag vorher beschleunigt und nachher abgebremst wird.

Der auf das Elektron übertragene Impuls hängt also nur von der senkrecht zur Bewegungsrichtung stehenden Komponente der Coulombkraft ab:

$$I = I_{\perp} = \int F_y dt = \int F_{\perp} dt = e \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dx} dx = \frac{e}{v} \int E_{\perp} dx. \quad (2)$$

Das Integral $\int E_{\perp} dx$ läßt sich auf eine sehr elegante Weise mit dem Gauss'schen Gesetz³ lösen. Dazu betrachtet man das Gauss'sche Gesetz über einen unendlich langen Zylinder um die Bahn des Teilchens und durch die Position des Elektrons (siehe Abb.(3)).

³Das Gauss'sche Gesetz lautet:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = 4\pi \sum_i q_i$$

mit

- \iint_S dem Flächenintegral über die geschlossene Fläche S
- da dem Flächenelement von S
- \mathbf{n} der nach außen gerichteten Flächennormalen von da
- \mathbf{E} dem elektrischen Feld von der Ladung q im betrachteten Punkt

Dazu muß man aber erst $\int E_{\perp} dx$ formal zu einem Flächenintegral „erweitern“:

$$\int E_{\perp} dx = \frac{1}{2\pi b} \iint_S E_{\perp} da \quad (3)$$

mit

$$da = 2\pi b \cdot dx,$$

dem infinitesimalen Flächenelement eines Zylinders mit dem Radius b . Damit erhält man für das Integral $\int E_{\perp} dx$ unter Verwendung des Gauss'schen Gesetzes

$$\begin{aligned} \int E_{\perp} dx &= \frac{1}{2\pi b} \iint_S E_{\perp} da = \frac{1}{2\pi b} \cdot 4\pi z e = \\ &= \frac{2ze}{b}. \end{aligned} \quad (4)$$

Dabei wurde

$$\iint_S E_{\perp} da = 4\pi z e$$

verwendet. Damit folgt für den Impuls

$$I_{\perp} = \frac{e}{v} \int E_{\perp} dx = \frac{2ze^2}{bv}, \quad (5)$$

und für die auf das Elektron übertragene Energie

$$\Delta E(b) = \frac{I_{\perp}^2}{2m_e} = \frac{2z^2 e^4}{m_e v^2 b^2}. \quad (6)$$

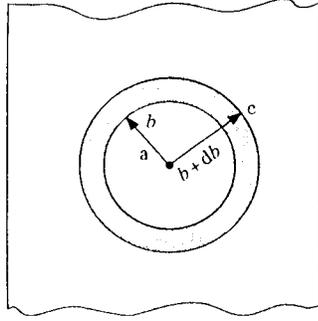
Der Energieübertrag $\Delta E(b)$ weist verschiedene interessante Merkmale auf. Er hängt nur von der Ladung und Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens ab, nicht aber von seiner Masse. Weiters variiert er mit dem reziproken Quadrat des Stoßparameters, so daß kleine Stoßparameter sehr große Energieüberträge verursachen.

Nun möchte man den Energieverlust des Teilchens kennen, wenn es eine Strecke Δx im Absorbermaterial zurücklegt und dabei mit mehreren Elektronen kollidiert. Dazu betrachtet man einen Schnitt durch den Zylinder senkrecht zur Bewegungsrichtung des Teilchens (Abb.(4)).

Berechnet man nun den Energieübertrag an mehrere Elektronen innerhalb eines Volumens, welches durch einen ringförmigen Zylinder mit Radius b^4 und der Dicke db sowie der entlang der Zylinderachse zurückgelegten Strecke dx gebildet wird, so gilt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (Dimension einer Fläche)

$$d\sigma = 2\pi b \cdot db. \quad (7)$$

⁴Dabei ist jedem b ein Streuwinkel beziehungsweise ein bestimmter Energieübertrag zugeordnet.

Abbildung 4: Querschnitt eines ringförmigen Zylinders ($b, b+db$).

Multipliziert man den Wirkungsquerschnitt mit der Flächenbelegungsichte der Elektronen ($=N_e \cdot dx$)⁵, so erhält man die differentielle Wahrscheinlichkeit

$$dP = d\sigma \cdot N_e \cdot dx = 2\pi b db \cdot N_e \cdot dx \quad (8)$$

Der differentielle Energieverlust in diesem ringförmigen Zylindervolumen ist dann

$$-dE(b) = \Delta E(b) \cdot dP = \Delta E(b) \cdot d\sigma \cdot N_e \cdot dx = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \frac{db}{b} dx. \quad (9)$$

Man könnte nun meinen, um den gesamten Energieverlust zu erhalten, müsse man Gl.(9) nur von $b = 0$ bis $b = \infty$ integrieren. Das wäre aber ein Widerspruch zu unseren ursprünglichen Annahmen. Wenn zum Beispiel der Stoß bei einem großen b erfolgt, erfolgt er nicht mehr innerhalb einer kurzen Zeitperiode und vorallem ist das Atom nach außen hin neutral. Die Integration kann also nur innerhalb bestimmter Grenzen b_{min} und b_{max} erfolgen, in denen Gl.(6) gültig ist. Man erhält für den gesamten Energieverlust das Ergebnis:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}. \quad (10)$$

Nun muß man noch die beiden Werte b_{min} und b_{max} abschätzen. Klassisch ist die maximal übertragbare Energie auf das Elektron (bei einem Frontalzusammenstoß

⁵mit der Elektronendichte

$$N_e = \frac{N_a \rho Z}{A},$$

N_a Avogadrokonstante, ρ Dichte des Absorbermaterials, Z Ordnungszahl, A Atomgewicht des Absorbermaterials.

mit einem schweren Teilchen der Geschwindigkeit v)

$$\frac{1}{2}m_e(2v)^2.$$

Das Elektron ändert seine Geschwindigkeit von 0 auf $2v$, wenn es vorhin in Ruhe gewesen ist und das einfallende Teilchen sehr viel schwerer als das Elektron ist. Dies lässt sich anhand einer kurzen Rechnung zeigen: Der Gesamtimpuls im Ruhesystem setzt sich zusammen aus dem Teilchenimpuls und dem Impuls des Elektrons:

$$p = p_e + p_p \rightarrow p_p = p - p_e$$

Aus der Energieerhaltung folgt

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m_p} &= \frac{p_p^2}{2m_p} + \frac{p_e^2}{2m_e} = \\ &= \frac{p^2 - 2pp_e + p_e^2}{2m_p} \end{aligned} \quad (11)$$

Durch Kürzen erhält man

$$v = \frac{p}{m_p} = \frac{p_e}{2m_e} + \frac{p_e}{2m_p} \simeq \frac{p_e}{2m_e} \quad (12)$$

und die Geschwindigkeit des Elektrons nach dem Stoß

$$v_e = \frac{p_e}{m_e} = 2v \quad (13)$$

Dieses Ergebnis erhält man auch aus einer Galileo Transformation mit dem Projektil als „Wand“. Mit relativistischen Korrekturen wird der Term für die kinetische Energie der Elektronen zu

$$2\gamma^2 m_e v^2.$$

Mit Gl(6) bekommt man schließlich

$$\begin{aligned} \Delta E(b_{min}) &= \frac{2z^2 e^4}{m_e v^2 b_{min}^2} = 2\gamma^2 m_e v^2, \\ b_{min} &= \frac{ze^2}{\gamma m_e v^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Um b_{max} abzuschätzen, muß man darauf zurückgehen, daß die Elektronen nicht frei sondern gebunden sind und eine mittlere Umlauffrequenz ω haben. Um mit der Forderung des ruhenden Elektrons vereinbar zu sein, muß der Stoß innerhalb der Zeit

$$\tau = \frac{1}{\omega}$$

erfolgen. Die typische Wechselwirkungszeit bei diesem Problem ist gegeben durch

$$t = \frac{b}{\gamma v}.$$

Damit folgt für b_{max} :

$$t \leq \tau \rightarrow \frac{b}{\gamma v} \leq \frac{1}{\omega} \rightarrow b_{max} = \frac{\gamma v}{\omega}. \quad (15)$$

Setzt man die gefundenen Werte in Gl.(9) ein, so ergibt sich schließlich für den Energieverlust als Ergebnis die klassische Formel von Bohr:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln \frac{\gamma^2 m_e v^3}{ze^2 \omega}. \quad (16)$$

Für ω verwendet man die mittlere Umlauffrequenz aller gebundenen Elektronen.

1.2.1 Harmonisch gebundene Ladung

Gibt man die Näherung des ruhenden Elektrons auf und beschreibt dieses als harmonisch gebundenen Ladung, welche der Gleichung

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{x} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}(t) \quad (17)$$

genügt, so erhält man das Ergebnis[2]

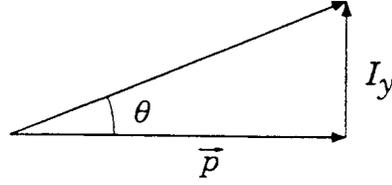
$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \left(\ln \frac{1.123 \gamma^2 m_e v^3}{ze^2 \omega} - \frac{v^2}{2c^2} \right). \quad (18)$$

In dieser Beschreibung wurden die Annahmen getroffen, daß

- der Energieübertrag klein ist,
- die Bewegung des *gebundenen* Teilchens während des ganzen Vorganges nichtrelativistisch ist, und
- die Anfangs- und Endamplitude der Schwingung um den Ursprung O klein gegenüber b ist.

1.2.2 Elastische Streuung und mittlerer quadratischer Streuwinkel

Bei einem Durchgang eines Teilchens durch Materie verläuft die Bahn des Teilchens nicht geradlinig. Der Vollständigkeit halber sei kurz die elastische Streuung am Kern im klassischen Modell angesprochen. Für die Ablenkung spielt im wesentlichen nur die Streuung am Kern eine Rolle (wie gleich gezeigt wird)

Abbildung 5: Der Winkel θ im Stoßprozeß.

Zur Wiederholung sei noch einmal die Stoßgeometrie aus Abb.(5) in Erinnerung gerufen.

Aus Gl.(5) erhielt man den Gesamtimpuls für die Ablenkung senkrecht zur Bewegungsrichtung:

$$I_y = I_{\perp} = \frac{2z_1 z_2 e^2}{vb}$$

und für die dabei übertragene Energie (bei Elektron mit $z_2=1$)

$$\Delta E(b) = \frac{I_{\perp}^2}{2m} = \frac{2z_1^2 z_2^2 e^4}{mv^2 b^2}.$$

$\Delta E(b)$ ist umgekehrt proportional zur Masse m des Targetteilchens (d.h., bei einem Stoß mit einem Elektron ist $m = m_e$, am Kern $m = m_k$). Da hier die Coulomb - Wechselwirkung mit dem Atomkern betrachtet wird, ist der Energieverlust mehrere tausend Male kleiner als bei Elektronen und kann daher vernachlässigt werden. Für einen Stoßparameter b ist die Abweichung von der ursprünglichen Bahn bei kleinen Abweichungen näherungsweise gegeben durch (siehe Abb.(5))

$$\theta \simeq \tan \theta = \frac{I_{\perp}}{p} = \frac{I_y}{p} = \frac{2z_1 z_2 e^2}{pvb} \quad (19)$$

und damit für b

$$b \simeq \frac{2z_1 z_2 e^2}{vp\theta}. \quad (20)$$

Die Wahrscheinlichkeit $\Sigma(\theta)d\theta$, daß das Teilchen unter einem Winkel im Intervall $[\theta, \theta + d\theta]$ gestreut wird, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen im Intervall $[b(\theta), b(\theta + d\theta)]$ am Targetteilchen vorbeifliegt. Diese Wahrscheinlichkeit ist für Teilchen, die auf eine Fläche $2\pi b \cdot db$ eines Ringes mit dem Radius b und der Dicke db auftreffen (Abb.(4)), gegeben durch

$$\Sigma(\theta)d\theta = \frac{d\sigma(b)}{db} \frac{db}{d\theta} d\theta = 2\pi b(\theta) \cdot db(\theta) = 2\pi \frac{(2z_1 z_2 e^2)^2}{(vp)^2} \frac{d\theta}{\theta^3} \quad (21)$$

Als mittleren quadratischen Ablenk Winkel pro Stoß erhält man demnach

$$\begin{aligned}
 \langle \theta^2 \rangle &= \int_0^\pi \theta^2 \Sigma(\theta) d\theta = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \theta^2(b) 2\pi b db = \\
 &= \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{(2z_1 z_2 e^2)^2}{(vp)^2} \frac{2\pi b}{b^2} db = \\
 &= 8\pi \frac{(2z_1 z_2 e^2)^2}{(vp)^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Die Werte für den Stoßparameter b sind eingeschränkt auf einen Minimalwert b_{min} , welcher dem Kernradius entspricht und einem Maximalwert b_{max} , welcher dem mittleren Atomradius entspricht, außerhalb dessen es kein elektrisches Feld mehr gibt.

Man betrachtet nun einen „dicken“ Absorber, in welchem ein Teilchen mehrere aufeinanderfolgende Streuungen an Kernen erfährt. Wenn die Winkel θ unabhängig sind voneinander, so addieren sich ihre Projektionen auf die Orthogonalen algebraisch. Die Projektion auf eine Ebene des totalen Ablenkungswinkels ist gleich der algebraischen Summe der Projektionen der aufeinanderfolgenden Teilwinkel. Wenn sich das Teilchen entlang der z-Achse in Abb(6) bewegt und um die Winkel θ und ϕ abgelenkt wird, so erhält man für die Projektionswinkel θ_x auf $x0z$ und θ_y auf $y0z$:

$$\begin{aligned}
 \sin \theta \cos \phi &= \frac{\cos \theta}{\cos \theta_x} \sin \theta_x \rightarrow \tan \theta_x = \tan \theta \cdot \cos \phi \\
 \sin \theta \sin \phi &= \frac{\cos \theta}{\cos \theta_y} \sin \theta_y \rightarrow \tan \theta_y = \tan \theta \cdot \sin \phi \tag{23}
 \end{aligned}$$

Bei kleinen Streuwinkeln θ kann man für die Winkel annehmen:

$$\theta_x \simeq \theta \cos \phi$$

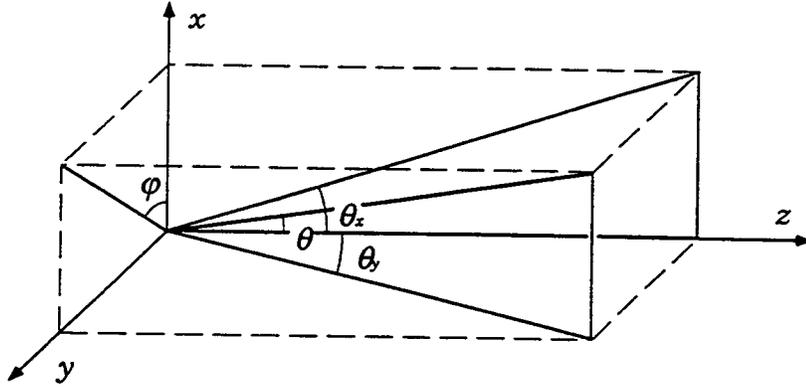
$$\theta_y \simeq \theta \sin \phi$$

Die Jacobimatrix der Koordinatentransformation (θ_x, θ_y) nach (θ, ϕ) ist:

$$J = \frac{\partial(\theta_x, \theta_y)}{\partial(\theta, \phi)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\theta \sin \phi \\ \sin \phi & \theta \cos \phi \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\Sigma(\theta_x, \theta_y) d\theta_x d\theta_y = \Sigma(\theta, \phi) \cdot \det J \cdot d\theta d\phi = \Sigma(\theta, \phi) \cdot \theta \cdot d\theta d\phi. \tag{24}$$

Abbildung 6: Die Projektionswinkel θ_x und θ_y .

Da das Problem ϕ -unabhängig ist, kann über den ϕ -Anteil in der Wahrscheinlichkeitsdichte integriert werden:

$$\begin{aligned}\Sigma(\theta)d\theta &= \left(\int_0^{2\pi} \Sigma(\theta, \phi) \cdot \theta \cdot d\phi \right) d\theta = \\ &= 2\pi \Sigma(\theta, \phi) \cdot \theta \cdot d\theta\end{aligned}\quad (25)$$

und daher

$$\Sigma(\theta, \phi) \cdot \theta \cdot d\theta d\phi = \Sigma(\theta) d\theta \frac{d\phi}{2\pi} \quad (26)$$

Der mittlere Projektionswinkel einer Kollision ist dann:

$$\begin{aligned}\langle \theta_x \rangle &= \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \int_0^{2\pi} \theta \cos(\phi) \Sigma(\theta) d\theta \frac{d\phi}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \theta \Sigma(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \cos(\phi) d\phi = \\ &= 0.\end{aligned}\quad (27)$$

Und der mittlere quadratische Projektionswinkel:

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \int_0^{2\pi} \theta^2 \cos^2(\phi) \Sigma(\theta) d\theta \frac{d\phi}{2\pi} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\langle \theta^2 \rangle}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) d\phi = \\
&= \frac{\langle \theta^2 \rangle}{2}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Ebenso:

$$\langle \theta_y \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \theta_y^2 \rangle = \frac{\langle \theta^2 \rangle}{2}.$$

In einem genügend dicken Schirm, in dem die mittlere Anzahl unabhängiger Einzelkollisionen des Teilchens groß sei, läßt sich der mittlere Projektionswinkel nach N Kollisionen mit Hilfe des *zentralen Grenzwerttheorems* ermitteln.

Der mittlere Projektionswinkel nach N Kollisionen ist dann:

$$\langle \Theta_x \rangle = N \cdot \langle \theta_x \rangle = 0. \tag{29}$$

Und die mittlere quadratische Abweichung:

$$\langle \Theta_x^2 \rangle = N \cdot \langle \theta_x^2 \rangle. \tag{30}$$

In einem Absorber mit der Dicke Δx ist die mittlere Anzahl der durchlaufenen Kollisionen eines Teilchens

$$N = \Delta x \cdot n \cdot \pi (b_{max}^2 - b_{min}^2) \simeq \Delta x \cdot n \cdot \pi b_{max}^2. \tag{31}$$

Dabei ist πb_{max}^2 die Wahrscheinlichkeit einer Kollision mit dem Kern und n die Atomdichte⁶. Für die Standardabweichung σ_p der Verteilung der Projektionswinkel nach N Kollisionen eines Teilchens in einem Absorber der Dicke Δx ist damit

$$\sigma_p = \sqrt{\langle \Theta_x^2 \rangle} = \sqrt{2\Delta x n \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} b_{max}^2} \frac{z_1 z_2 e^2}{pv}. \tag{32}$$

σ_p ist die Streuung des projizierten Streuwinkels ($\equiv [\text{Varianz}]^{\frac{1}{2}}$). Das Ergebnis ist (ohne Beweis, p in Mev/c)

$$\sigma_p = \sqrt{\langle \Theta_x^2 \rangle} = \frac{13.6Z}{p\beta c} \sqrt{\frac{\Delta x}{X_0}}, \tag{33}$$

mit der *Strahlungslänge* X_0 .

Der zentrale Teil der Verteilung der Projektionswinkel ist gaussförmig:

$$P(\Theta_x)d\Theta_x = \frac{e^{-\frac{\Theta_x^2}{2\sigma_p^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} d\Theta_x, \quad P(\Theta_y)d\Theta_y = \frac{e^{-\frac{\Theta_y^2}{2\sigma_p^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} d\Theta_y \tag{34}$$

6

$$n = N_a \frac{\rho}{A},$$

N_a Avogadrokonstante, ρ Dichte des Absorbermaterials, A Atomgewicht des Absorbermaterials.

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der beiden Winkel Θ_x und Θ_y ist das Produkt der beiden:

$$P(\Theta_x, \Theta_y) = \frac{e^{-\frac{\Theta_x^2 + \Theta_y^2}{2\sigma_p^2}}}{2\pi\sigma_p^2} \quad (35)$$

Für kleine Winkel Θ_x und Θ_y kann man wieder die Näherung machen:

$$\begin{aligned} \Theta_x &\simeq \Theta \cos \Phi \\ \Theta_y &\simeq \Theta \sin \Phi \end{aligned} \quad (36)$$

Die Jacobimatrix der Koordinatentransformation (Θ_x, Θ_y) nach (Θ, Φ) ist:

$$J = \frac{\partial(\Theta_x, \Theta_y)}{\partial(\Theta, \Phi)} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & -\Theta \sin \Phi \\ \sin \Phi & \Theta \cos \Phi \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(\Theta_x, \Theta_y)d\Theta_x d\Theta_y = P(\Theta, \Phi) \cdot \det J \cdot d\Theta d\Phi = P(\Theta, \Phi) \cdot \Theta \cdot d\Theta d\Phi.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Austrittswinkel des Teilchens innerhalb eines Kegels mit dem Öffnungswinkel Θ_m liegt, ist:

$$\begin{aligned} \Pi(\Theta_m) &= \frac{1}{2\pi\sigma_p^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\Theta_m} e^{-\frac{\Theta^2}{2\sigma_p^2}} \Theta d\Theta d\Phi = \frac{2\pi}{2\pi\sigma_p^2} \frac{1}{2} \left(-2\sigma_p^2 e^{-\frac{\Theta^2}{2\sigma_p^2}} \right) \Big|_0^{\Theta_m} \\ \rightarrow \Pi(\Theta_m) &= 1 - e^{-\frac{\Theta_m^2}{2\sigma_p^2}} \end{aligned} \quad (37)$$

Dieses Ergebnis gilt wie gesagt nur unter der Einschränkung kleiner Ablenkungen. Tatsächlich beobachtet man bei einer solchen Verteilung einen Schwanz nach beiden Seiten, der auf große Einzelabweichungen (durch eine Kollision des Teilchens mit dem Kern) zurückzuführen ist. Dieses Ereignis ist aber wenig wahrscheinlich und betrifft nur eine kleine Anzahl von Teilchen.

1.2.3 Schlußfolgerungen zum klassischen Modell

- Sowohl die klassische Bohrsche Formel wie auch Gl.(18) liefern zu große Werte für den Energieverlust schneller leichter Teilchen (wie Protonen), da sie Quanteneffekte nicht berücksichtigen. Vernünftige Werte erhält man für langsame ($\beta \ll 1$) und schwere Teilchen (zum Beispiel α - Teilchen).
- Sowohl in der klassischen wie auch in (der später behandelten) quantenmechanischen Beschreibung stimmt der Hauptterm vor dem Logarithmus überein. Das bedeutet aber, daß
 - $-\frac{dE}{dx} = f(z^2)$, das heißt, die Energieverluste sind proportional zum Quadrat der Ladung des durchfliegenden Teilchens, und
 - $-\frac{dE}{dx} = f(\frac{1}{v^2}) = f(\frac{m}{2E})$, was bedeutet, daß der Energieverlust nur vom Verhältnis zwischen der Masse des einfallenden Teilchens und seiner Energie abhängt.
- Betrachtet man

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{b_{min}^2}{b_{max}^2} \rightarrow \ln \frac{E_{max}}{E_{min}} = 2 \ln \frac{b_{min}}{b_{max}},$$

so entsteht ein Faktor 2. In der QED - Rechnung für den Energieverlust kommt dieser Faktor nicht vor.

- Einen schematischen Zusammenhang zwischen den einzelnen Kurven von $-\frac{dE}{dx}$ kann man in Abb.(7) sehen.

1.3 Das quantenmechanische Modell (Bethe, Bloch)

1.3.1 Der differentielle Wirkungsquerschnitt

Bei einem Zusammenstoß von zwei Teilchen stellen sich zwei Fragen:

- Ablenkung und Energieverlust des einfallenden geladenen Teilchens und
- Anregung des Target - Teilchens (zum Beispiel Atom).

Die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen stattfindet, wird über den Wirkungsquerschnitt definiert.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist definiert als

$$d\sigma = \frac{A}{B} \tag{38}$$

Der Faktor B steht für den Teilchenstrom einer einfallenden Welle, A steht für die auslaufende Teilchenstromdichte in einem Flächenelement $d\mathbf{f}$ ($d\mathbf{f} = r^2 d\Omega \frac{\mathbf{r}}{r}$). Der

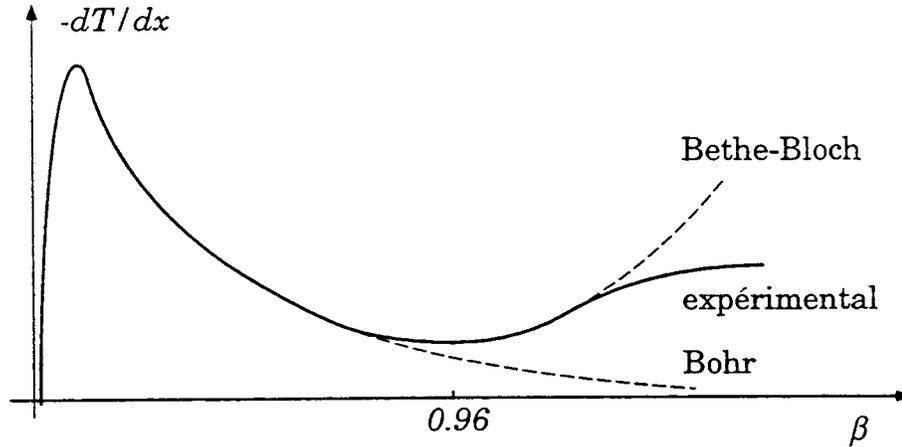


Abbildung 7: Energieverlust nach Bohr, Bethe-Bloch (nicht-relativistische QM) und experimentell.

(integrale) Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche. Er ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung zweier streuender Teilchen. Je nachdem, ob es bei der Streuung (im Schwerpunktsystem) zu einem Energieübertrag kommt ($(t, t') \rightarrow (t, t'^*)$) oder zu keinem Energieübertrag auf das Target-Teilchen kommt ($(t, t') \rightarrow (t, t')$), spricht man vom *inelastischen* oder *elastischen* Wirkungsquerschnitt (σ_{inel} oder σ_{el}).

Man kann sich den Wirkungsquerschnitt folgendermaßen veranschaulichen:

Ein Strom von geladenen Teilchen (Masse m , Ladung z) bewegt sich mit der Geschwindigkeit v auf ein Atom (Masse M , Kernladung Z) zu, das sich im Zustand n befindet. Gemessen wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß durch einen Zusammenstoß mit dem Atom eines der Teilchen um den Winkel θ in den Winkelbereich $d\Omega$ abgelenkt, und daß gleichzeitig das Atom in den Zustand n' (diskret oder kontinuierlich) angeregt wird. Aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt erhält man

- durch Integration über alle Ablenkungswinkel des einfallenden Teilchens ein Maß für die Wahrscheinlichkeit der Anregung des Niveaus n' des Atoms $\sigma_{nn'}$,
- durch Summation über alle möglichen Anregungen des Atoms (alle n') ein Maß für die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Ablenkung θ der einfallenden Teilchen (Winkelverteilung) $d\sigma(\theta)$,

- durch Ausführung beider Summationen den totalen Wirkungsquerschnitt σ ,
- durch Multiplikation von $\sigma_{nn'}$ mit der auf das Atom übertragenen Energie $E_{n'} - E_n$ und nachfolgende Summation über n' den gesamten Energieverlust ϵ des Teilchenstroms pro Sekunde, aus dem sich dann die Abbremsung eines einzelnen Teilchens berechnet.

1.3.2 Inelastische Streuung im quantenmechanischen Modell

Für eine ausführliche Behandlung der inelastischen Streuung sei auf die Standardliteratur verwiesen. Im folgenden sei eine kurze Skizze der Bornschen Streuung gegeben⁷. Der Hamiltonoperator für das gesamte Problem ist gegeben durch

$$H = H_{atom} + H_{particle} + H_{int} \quad (39)$$

Die inelastische Streuung zwischen Teilchen und Atom kann durch ein effektives elektrostatisches Potential, welches das einfallende Teilchen „spürt“, gut angenähert werden mit

$$V_n(r) = ze \left[\frac{Ze\delta_{n0}}{r} - \int \frac{\rho_n(\mathbf{r}')e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \right], \quad (40)$$

wobei das Atom vom Grundzustand ϕ_0 in den n -ten angeregten Zustand ϕ_n übergeht. Bei elastischer Streuung gilt $n=0$ am gesamten Atom. \mathbf{r} gibt den Ort des einfallenden Teilchens mit der Ladung ze an. Das Potential genügt der Poisson-Gleichung

$$\Delta V = -4\pi ze^2 [Z\delta(\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{r})] \quad (41)$$

Für die Elektronendichte ρ gilt

$$\int \rho(\mathbf{r}) d\tau = Z, \quad (42)$$

mit Z der Ordnungszahl des Atoms. Die Fouriertransformierte von ρ ist definiert als der Formfaktor $F(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}) &= \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\tau \\ |F(\mathbf{q})| &\leq \int \rho(\mathbf{r}) d\tau = Z \end{aligned} \quad (43)$$

Die Grund- und Endzustandsenergie sei E_0 und E_n . Der Anfangs- und Endimpuls des gestreuten Teilchens sei

$$\mathbf{p}_0 = \hbar\mathbf{k}_0, \quad \mathbf{p}_n = \hbar\mathbf{k}_n.$$

⁷für eine genaue Beschreibung siehe [3], S. 295ff

Aus der Energieerhaltung folgt

$$\hbar^2(k_0^2 - k_n^2) = 2m(E_n - E_0) = 2m(W_n - W_0), \quad (44)$$

wobei W_n die totale Energie (Masse + Impuls) des einfallenden Teilchens ist. Die Änderung des Impulses des gestreuten Teilchens ist

$$\begin{aligned} \hbar\mathbf{q} &= \hbar(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_n), \\ q^2 &= k_0^2 + k_n^2 - 2k_0k_n \cos(\theta(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_n)), \\ \cos(\theta) &= \frac{\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_n}{k_0k_n}. \end{aligned} \quad (45)$$

Den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die inelastische Streuung erhält man aus der Übergangsamplitude mit der Goldenen Regel von Fermi,

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar v_0} |S_{0n}|^2 \rho(W_n). \quad (46)$$

$\rho(W_n)$ ist die Dichte der Endzustände und gegeben durch

$$\rho(W_n) = \frac{p_n^2 dp_n}{(2\pi\hbar)^3 dW_n}.$$

v_0 und v_n sind die Anfangs- beziehungsweise Endgeschwindigkeiten. Die Übergangsamplitude S_{0n} erhält aus der Bornschen Näherung für die Amplitude eines Überganges vom Zustand $|0\rangle$ in einen Zustand $|n\rangle$ und ist gegeben durch (Störungsrechnung erster Ordnung)

$$S_{0n} = \langle n | H_{int} | 0 \rangle \quad (47)$$

mit

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \phi_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}, \\ \langle n| &= (|n\rangle)^* = \phi_n^* e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}}, \\ H_{int} &= V_n(r). \end{aligned}$$

Die Berechnung für S_{0n} ergibt⁸

$$\begin{aligned} S_{0n} &= -\frac{4\pi e^2 z}{q^2} \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \rho_n(\mathbf{r}) d\tau = \\ &= -\frac{4\pi e^2 z}{q^2} F_n(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (48)$$

Mit $dW_n/dp_n = v_n$ und

$$p_n = \left(\frac{W_n}{c^2} \right) v_n \quad (49)$$

⁸[3] S. 297-298

erhält man

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = \left[\frac{2e^2 z W_n}{\hbar^2 c^2 q^2} \right]^2 \frac{v_n}{v_0} |F_n(\mathbf{q})|^2 \quad (50)$$

Der gesamte Wirkungsquerschnitt (in der Bornschen Näherung) für inelastische Streuung in den Endzustand n ist dann

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \int \frac{d\sigma_n}{d\Omega} d\Omega = \\ &= \left[\frac{2e^2 z W_n}{\hbar^2 c^2} \right]^2 \frac{v_n}{v_0} \int d\Omega \frac{|F_n(\mathbf{q})|^2}{q^4} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\frac{v_n}{v_0} d\Omega = \frac{v_n}{v_0} \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (52)$$

Aus Gl.(45) erhält man

$$q dq = k_n k_0 \sin(\theta) d\theta. \quad (53)$$

Aus der relativistischen Formel Gl.(49) bekommt man

$$k_n = \frac{W_n}{\hbar c^2} v_n. \quad (54)$$

Daraus läßt sich der Winkelanteil neu schreiben mit

$$\begin{aligned} \frac{v_n}{v_0} d\Omega &= \frac{1}{k_0^2} \frac{v_n}{k_n} \frac{k_0}{v_0} q dq d\phi \\ &= \frac{W_0}{W_n} \frac{q dq d\phi}{k_0^2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Damit wird der gesamte Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \sigma_n &= 2\pi \left[\frac{2e^2 z}{\hbar} \underbrace{\frac{W_0}{c^2 p_0}}_{v_0} \right]^2 \underbrace{\frac{W_n}{W_0}}_{\simeq 1} \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{F_n^2(q)}{q^3} dq = \\ &= 2\pi \left[\frac{2e^2 z}{\hbar v_0} \right]^2 \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{F_n^2(q)}{q^3} dq. \end{aligned} \quad (56)$$

Die Grenzen q_{max} und q_{min} sind gegeben durch $k_0 + k_n$ und $|k_0 - k_n|$. Außerdem wurde angenommen, daß F ϕ -unabhängig ist und der Energieübertrag $W_n - W_0$ klein ist im Vergleich zur Anfangsenergie des einfallenden Teilchens ($W_n \simeq W_0$).

1.3.3 Die Bethe - Formel für den Energieverlust

Unter der Annahme von unabhängigen aufeinanderfolgenden Kollisionen ist der gesamte Energieverlust des Teilchens gleich der Summe des Energieübertrages bei Anregung und Ionisation der einzelnen Atome. Wenn durch eine bestimmte Kollision ein Atom vom Zustand $|0\rangle$ (mit der Grundzustandsenergie E_0) in den Zustand $|n\rangle$ (Endzustandsenergie E_n) übergeht, so verliert das Teilchen einen bestimmten Betrag an Energie, der gleich der Differenz $E_n - E_0$ ist. Daraus folgt, wenn ΔN_n die mittlere Anzahl an Kollisionen eines Teilchens mit Atomen in einer Materialschicht der Dicke Δx ist, die zu einem Übergang $|0\rangle \rightarrow |n\rangle$ führen, dann ist die mittlere Energieänderung des Teilchens beim Durchgang durch die Schicht Δx

$$-\Delta E = \sum_n (E_n - E_0) \Delta N_n. \quad (57)$$

Drückt man ΔN_n mit Hilfe des Wirkungsquerschnittes σ_n aus,

$$\Delta N_n = N \sigma_n \Delta x, \quad (58)$$

wobei N die Anzahl der Atome der Sorte A pro Einheitsvolumen ist, so erhält man (mit dem Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$) den Energieverlust pro Einheitsweglänge

$$-\frac{dW}{dx} = \sum_n N \sigma_n (E_n - E_0) = \sum_n N \int \frac{d\sigma_n}{d\Omega} d\Omega (E_n - E_0). \quad (59)$$

Mit dem Wirkungsquerschnitt von Gl.(56) kann man sofort schreiben

$$-\frac{dW}{dx} = 2\pi N \left(\frac{2e^2 z}{\hbar v_0} \right)^2 \sum_n \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{F_n^2(\mathbf{q})}{q^3} dq \cdot (E_n - E_0). \quad (60)$$

Man kann nun mit einer Näherung Summation über n und Integration über q vertauschen (Näherung deshalb, da q_{min} und q_{max} beide von E_n abhängen):

$$-\frac{dW}{dx} = 2\pi N \left(\frac{2e^2 z}{\hbar v_0} \right)^2 \int_{\bar{q}_{min}}^{\bar{q}_{max}} \frac{dq}{q^3} \sum_n \left| \int \phi_n^* B \phi_0 d\tau \right|^2 \cdot (E_n - E_0), \quad (61)$$

mit

$$B = \sum_i e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}$$

Die Summe kann exakt berechnet werden⁹ und liefert

$$\sum_n \left| \int \phi_n^* \sum_i e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i} \phi_0 d\tau \right|^2 (E_n - E_0) = \frac{\hbar^2}{2m_e} Z q^2. \quad (62)$$

⁹siehe [3] S. 305

Damit ergibt sich für den Energieverlust schließlich

$$\begin{aligned} -\frac{dW}{dx} &= \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v_0^2} N Z \int_{\bar{q}_{min}}^{\bar{q}_{max}} \frac{dq}{q} = \\ &= \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v_0^2} N Z \ln \frac{\bar{q}_{max}}{\bar{q}_{min}}. \end{aligned} \quad (63)$$

Das Produkt NZ (N ... Anzahl der Atome pro Einheitsvolumen, Z Ordnungszahl) ist die Anzahl der Elektronen pro Einheitsvolumen. Es fehlt noch eine Schätzung für die Grenzen \bar{q}_{min} und \bar{q}_{max} . \bar{q}_{min} ist gegeben durch

$$\hbar \bar{q}_{min} = \hbar(k_0 - k_n) = p_0 - p_n = \Delta p \sim \frac{\Delta W}{v_0},$$

da

$$\frac{dW}{dp} = v.$$

\bar{q}_{min} ist also gegeben durch

$$\hbar \bar{q}_{min} = \frac{E_n - E_0}{v_0} \rightarrow \hbar \bar{q}_{min} = \overline{E_n - E_0} = \frac{I}{v_0}. \quad (64)$$

Die obere Grenze

$$\bar{q}_{max} = \overline{k_n + k_0} \sim 2k_0$$

ergibt sich aus der Überlegung, daß im maximale Impulsübertrag von einem einfallenden Teilchen auf ein Elektron Energie und Impuls zwischen beiden Teilchen erhalten sein müssen (das heißt, der Kern bleibt in Ruhe, was natürlich auch nur eine Näherung ist). Aus der klassischen Mechanik folgt für den maximalen Impulsübertrag

$$p_{max} = \hbar q_{max} = \frac{2m_e m v_0}{m_e + m}. \quad (65)$$

Gilt $m \gg m_e$, so kann man die Näherung machen

$$\hbar q_{max} \simeq 2m_e v_0 \quad (66)$$

Damit folgt für die Bethe Formel für den Energieverlust

$$-\frac{dW}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v_0^2} N Z \ln \frac{2m_e v_0^2}{I} \quad (67)$$

Betrachtet man das einfallende Teilchen relativistisch, so folgt

$$-\frac{dW}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v_0^2} N Z \ln \frac{2m_e v_0^2}{I(1 - \frac{v_0^2}{c^2})} \quad (68)$$

I ist ein freier Parameter, welcher vom jeweiligen Atom abhängt, an welchem gestreut wird. I kann über die Oszillatorstärken¹⁰ definiert werden. Man erhält

$$I = CZ, \quad (69)$$

mit einer experimentell zu ermittelnden Konstante C . Man erhält ungefähr

$$C = 10eV.$$

1.3.4 Die Bethe - Bloch Formel (relativistische Q.M.)

Die klassische Formel von Bethe erhält man aus dem Übergang zum Impulsübergang an Stelle der Überlegungen mit dem Stoßparameter. Diese Betrachtung ist auch physikalischer, da der Impuls eine meßbare Größe darstellt während der Stoßparameter nicht meßbar ist. Das eigentliche Problem aber, daß bei einem Übergang der Parametrisierung vom Stoßparameter zur Energie

$$\frac{E_{min}}{E_{max}} = \frac{b_{max}^2}{b_{min}^2} \quad \rightarrow \quad \ln \frac{E_{min}}{E_{max}} = 2 \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}$$

ein Faktor 2 ins Spiel kommt, wird dadurch nicht gelöst, denn nun gilt ja

$$\frac{E_{min}}{E_{max}} = \frac{p_{min}^2}{p_{max}^2}. \quad (70)$$

Um also zu einer korrekten physikalischen Beschreibung des Energieverlustes zu gelangen, ist es notwendig, auf ein relativistisches Atommodell zurückzugreifen. Die Berechnung wurde erstmals von Bloch (1935) durchgeführt und lieferte das Ergebnis

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right] \quad (71)$$

Diese Gleichung (71) ist die bekannte Bethe - Bloch Formel für den Energieverlust. In der Praxis fügt man noch zwei Korrekturen hinzu: eine zur Korrektur von *Dichteeffekten*, δ , und eine *Schalenkorrektur* C . Die Bethe - Bloch Formel wird damit zu

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right]. \quad (72)$$

$$2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 = 0.1535 \frac{MeV cm^2}{g}$$

¹⁰siehe [3] S. 306ff.

r_e :	klassischer Elektronenradius = $2.817 \times 10^{-13} \text{cm}$	ρ :	Dichte
m_e :	Elektronenmasse	z :	Ladung des einfallenden Teilchens
N_a :	Avogadro'sche Zahl = $6.022 \times 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$	β =	v/c des einfallenden Teilchens
I:	mittleres Ionisationspotential (mean excitation potential)	γ =	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$
Z:	Ordnungszahl (atomic number of absorbing material)	δ :	Dichtekorrektur (density correction)
A:	Atomgewicht (atomic weight of absorbing material)	C:	Schalenkorrektur (shell correction)
		W_{max}	maximaler Energieübertrag in einer Einzelkollision (maximum energy transfer)

W_{max} beschreibt den maximal möglichen Energieübertrag bei einem Frontalzusammenstoß. Mit M für die Masse des einfallenden Teilchens ergibt sich für W_{max}

$$W_{max} = \frac{2m_e c^2 \eta^2}{1 + 2s\sqrt{1 + \eta^2 + s^2}}, \quad (73)$$

mit

$$s = \frac{m_e}{M}, \quad \eta = \beta\gamma.$$

Gilt $M \gg m_e$, kann als Näherung für W_{max}

$$W_{max} \simeq 2m_e c^2 \eta^2$$

verwendet werden. Das **mittlere Ionisationspotential** („mean excitation potential“) ist einer der Hauptparameter in der Formel für den Energieverlust. Es hängt von der mittleren Orbitalfrequenz der Elektronen im entsprechenden Material ab, und die ist wiederum abhängig von den sogenannten Oszillatorstärken der Energieniveaus. Da die Berechnung des Ionisationspotentials sehr kompliziert ist, verwendet man für dasselbe eine semi-empirische Formel, welche aus entsprechenden Experimenten erhalten wurde:

$$\begin{aligned} \frac{I}{Z} &= \left(12 + \frac{7}{Z}\right) eV, & Z < 13 \\ \frac{I}{Z} &= \left(9.76 + 58.8 \cdot Z^{-1.19}\right) eV, & Z \geq 13. \end{aligned} \quad (74)$$

Tatsächlich ist der Zusammenhang zwischen I und Z noch um einiges komplizierter. Für einige Materialien sind explizite verbesserte Werte für I in der Abb.(8) angegeben.

Die Größen δ und C sind Korrekturen zur Bethe - Bloch Formel bei jeweils hohen und niedrigen Energien des einfallenden Teilchens.

Material	I [eV]	$-C_0$	a	m	X_1	X_0
Graphite						
density = 2	78	2.99	0.2024	3.00	2.486	-0.0351
Mg	156	4.53	0.0816	3.62	3.07	0.1499
Cu	322	4.42	0.1434	2.90	3.28	-0.0254
Al	166	4.24	0.0802	3.63	3.01	0.1708
Fe	286	4.29	0.1468	2.96	3.15	-0.0012
Au	790	5.57	0.0976	3.11	3.70	0.2021
Pb	823	6.20	0.0936	3.16	3.81	0.3776
Si	173	4.44	0.1492	3.25	2.87	0.2014
NaI	452	6.06	0.1252	3.04	3.59	0.1203
N ₂	82	10.5	0.1534	3.21	4.13	1.738
O ₂	95	10.7	0.1178	3.29	4.32	1.754
H ₂ O	75	3.50	0.0911	3.48	2.80	0.2400
Lucite	74	3.30	0.1143	3.38	2.67	0.1824
Air	85.7	10.6	0.1091	3.40	4.28	1.742
BGO	534	5.74	0.0957	3.08	3.78	0.0456
Plastic						
Scint.	64.7	3.20	0.1610	3.24	2.49	0.1464

Abbildung 8: Konstanten für I , δ und C .

Dichtekorrekturen

Bei hohen Energien kommt es zu Polarisierungseffekten im Absorbermaterial, die bewirken, daß weiter außen liegende Elektronen weniger stark betroffen sind. Daher tragen diese Elektronen auch weniger zum Energieverlust bei als von der Bethe - Bloch Formel vorhergesagt. Werte für δ sind gegeben durch die Formel von Sternheimer:

$$\delta = \begin{cases} 0 & X < X_0 \\ 4.6052X + C_0 + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ 4.6052X + C_0 & X > X_1, \end{cases} \quad (75)$$

mit $X = \log_{10}(\beta\gamma)$.

Die Größen X_0 , X_1 , C_0 , a und m hängen vom Absorbermaterial ab. Der Parameter C_0 ist definiert als

$$C_0 = -\left(2 \ln \frac{I}{h\nu_p} + 1\right), \quad (76)$$

mit $h\nu_p$ der sogenannte Plasmafrequenz des Materials,

$$\nu_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\pi m_e}} = \sqrt{80.617 \times 10^6 \text{ cm}^3 N_e} \text{ Hz}, \quad (77)$$

mit der Elektronendichte

$$N_e = \frac{N_a \rho Z}{A}.$$

Einige Werte zur Berechnung von δ finden sich in der Tabell Abb.(8) wieder.

Schalenkorrekturen

Ist die Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens vergleichbar oder kleiner der der Hüllenelektronen, so ist die Annahme der stationären Elektronen nicht mehr gegeben. Die Korrektur ist im allgemeinen Fall gering. Auch hier sei eine empirische Formel angegeben:

$$C(I, \eta) = (0.422377\eta^{-2} + 0.0304043\eta^{-4} - 0.38106\eta^{-9}) \times 10^{-6}I^2 + \\ + (3.85019\eta^{-2} - 0.1667989\eta^{-4} + 1.57955\eta^{-9}) \times 10^{-9}I^{-9}, \quad (78)$$

mit $\eta = \beta\gamma$ und I dem mittleren Ionisationspotential in eV.

Andere Korrekturen sollten nicht mehr als 1% Abweichung vom „wahren“ Wert ergeben.

1.3.5 Eigenschaften der Bethe - Bloch Formel

Energieabhängigkeit

Wie in Abb.(7) schematisch angedeutet, hat die Energieverlustkurve zwei Extrema: einen *maximal ionisierenden* Punkt bei relativ geringen Geschwindigkeiten und einen *minimal ionisierenden* Punkt bei etwas höheren Teilchengeschwindigkeiten. Die Berechnung von dE/dx im Bereich des Maximums ist aufgrund der geringen Teilchengeschwindigkeiten (vergleichbar mit der Umlaufgeschwindigkeit der Elektronen) sehr kompliziert, da eine Reihe zusätzlicher Effekte auftreten. Für den Elementarteilchenphysiker sind aber fast ausschließlich Werte rechts vom Maximum interessant, weshalb meistens die dE/dx Kurve nur rechts von ihrem Maximum gezeichnet wird. Rechts vom Minimum kommt es wieder zu einem Anstieg - dem *relativistischen Anstieg*, der allerdings durch die Dichtekorrekturen ab einer gewissen Energie zum Teil aufgehoben wird. Eine grobe Abschätzung für das Minimum (unabhängig vom Material) liegt bei

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \simeq 2 \frac{\text{MeV}}{g} \cdot \text{cm}^2.$$

Skalengesetze

Man bemerke, daß der Energieverlust nur von der Ladung und der Geschwindigkeit eines Teilchens abhängt, nicht jedoch von seiner Masse:

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 \cdot f(\beta), \quad (79)$$

wobei $f(\beta)$ nur eine Funktion von der Teilchengeschwindigkeit ist. Da die *kinetische Energie* gegeben ist durch

$$T = (\gamma - 1)Mc^2, \quad (80)$$

ist die Teilchengeschwindigkeit eine Funktion von

$$\beta = g\left(\frac{T}{M}\right). \quad (81)$$

Daher kann Gl.(79) umgeschrieben werden zu

$$-\frac{dE}{dx} = z^2 \cdot f'\left(\frac{T}{M}\right). \quad (82)$$

Kennt man jetzt den Energieverlust eines Teilchens mit der Masse M_1 und der Ladung z_1 , so kann für ein zweites Teilchen im selben Material der Energieverlust gefunden werden über

$$-\frac{dE_2}{dx}(T_2) = -\frac{z_2^2}{z_1^2} \frac{dE_1}{dx}\left(T_2 \frac{M_1}{M_2}\right). \quad (83)$$

Relativer Energieverlust (Mass Stopping Power)

Oft verwendet man an Stelle der Einheit (Energie/Weg) für den Energieverlust die Einheit

$$-\frac{dE}{dX} = -\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = z^2 \frac{Z}{A} f(\beta, I) \quad (84)$$

Der Faktor (Z/A) unterscheidet sich nur gering bei vielen verschiedenen Materialien (große Abweichungen erst bei großem Z). Gleiches gilt für $I(Z)$, da es nur logarithmisch beiträgt. Daher ist $\frac{dE}{dX}$ beinahe unabhängig vom Material. Ein 10MeV Proton zum Beispiel verliert daher ungefähr den gleichen Energiebetrag in $1 \frac{g}{cm^2}$ Kupfer wie auch in $1 \frac{g}{cm^2}$ Aluminium oder Eisen.

dE/dx in gemischten Materialien

Generell kann der Energieverlust in zusammengesetzten Materialien nur näherungsweise berechnet werden, für genaue Werte ist man auf direkte Messungen angewiesen. Eine gute Näherung erhält man dadurch, in dem man dE/dx über jedes Element mittelt, gewichtet durch den Anteil an Elektronen zu jedem Element:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = \frac{w_1}{\rho_1} \left(\frac{dE}{dx}\right)_1 + \frac{w_2}{\rho_2} \left(\frac{dE}{dx}\right)_2 + \dots, \quad (85)$$

mit w_1, w_2, \dots den Gewichtsanteilen der Elemente 1, 2, ... in der Zusammensetzung. Genauer gesagt, wenn a_i die Anzahl der Atome des i-ten Elements im Molekül M ist, dann ist

$$w_i = \frac{a_i A_i}{\sum_i a_i A_i}, \quad (86)$$

mit A_i dem Atomgewicht des i -ten Elements. Man kann zeigen, daß man auch direkt Gl.(71) verwenden kann, in dem man sich „effektive“ Werte definiert:

$$\begin{aligned}
 Z_{eff} &= \sum_i a_i Z_i \\
 A_{eff} &= \sum_i a_i A_i \\
 \ln I_{eff} &= \sum_i \frac{a_i Z_i \ln I_i}{Z_{eff}} \\
 \delta_{eff} &= \sum_i \frac{a_i Z_i \delta_i}{Z_{eff}} \\
 C_{eff} &= \sum_i a_i C_i.
 \end{aligned} \tag{87}$$

Zu beachten ist, daß in diesem Fall mit $\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}$ gearbeitet wird statt mit $\frac{dE}{dx}$.

Reichweite

Ist der Energieverlust eines Teilchens in einem Material bekannt, stellt sich die Frage nach der Reichweite des Teilchens in diesem Material. Ein Problem stellt sich dadurch, daß der Energieverlust eines Teilchens *nicht kontinuierlicher*, sondern *statistischer* Natur ist. Das heißt, zwei Teilchen der selben Anfangsenergie werden unterschiedlich viele Kollisionen erfahren und daher auch unterschiedlich viel Energie verlieren (Landauverteilung). Eine Messung der Reichweite mit n gleichen Teilchen wird eine statistische Verteilung für die Reichweite der Teilchen ergeben, die näherungsweise einer Gaußverteilung entspricht. Die Tatsache, daß sich die Reichweiten der einzelnen Teilchen um einen wahrscheinlichsten Wert (Gauß=Mittelwert) herum verteilen, bezeichnet man als *range straggling*. Eine schematische Kurve des Zusammenhangs zwischen der Anzahl der durchgehenden Teilchen in Abhängigkeit zur Absorberdicke ist in Abb.(9) zu sehen.

Der Mittelwert der Reichweitenverteilung liegt in etwa bei der halben Höhe der Kurve (\equiv 50% absorbiertes Teilchen). Für gewöhnlich ist aber die Dicke des Absorbermaterials gesucht, bei der nicht die Hälfte, sondern *fast alle* Teilchen absorbiert werden. Diesen Punkt findet man, in dem man eine Tangente an den abfallenden Ast der Kurve legt in der halben Höhe der Kurve (*extrapolated range*).

Vom theoretischen Standpunkt aus kann man die *mittlere* Reichweite eines Teilchens mit der Anfangsenergie T_0 aus der Integration der dE/dx Formel berechnen:

$$R(T_0) = \int_0^{T_0} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE. \tag{88}$$

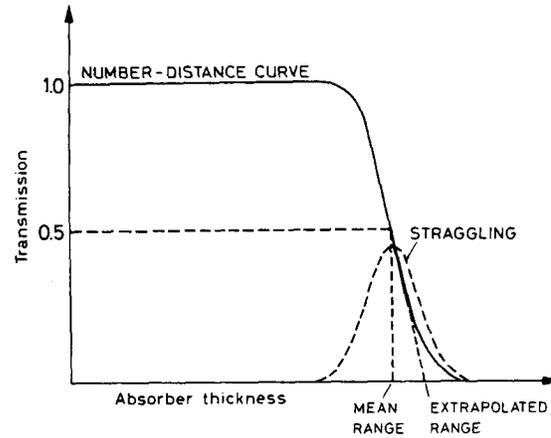


Abbildung 9: Schematische Kurve der Zahl der Teilchen in Abhängigkeit zur Absorberdicke.

Bei dieser Berechnung werden Effekte von Mehrfachstreuungen (multiple Coulomb scattering) nicht berücksichtigt. Diese Effekte führen dazu, daß das Teilchen keinen geradlinigen Weg sondern eine Art zick-zack Weg durch den Absorber zurücklegt. Das heißt, daß die Reichweite, definiert als geradlinige Weglänge (Dicke), kleiner ist als die gesamte zick-zack Weglänge. In der Praxis wird meist eine semi - empirische Formel für die Reichweite verwendet, welche das Verhalten des Energieverlustes bei niedrigen Energien mitberücksichtigt:

$$R(T_0) = R_0(T_{min}) + \int_{T_{min}}^{T_0} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE, \quad (89)$$

mit einer unteren Grenze T_{min} , ab welcher die dE/dx Formel gültig ist, und einer empirischen Konstante $R_0(T_{min})$, welche das Verhalten des Energieverlustes bei niedrigen Teilchenenergien berücksichtigt. Einige typische Reichweiten - Energiekurven sind in Abb.(10) zu sehen.

Aus der beinahe linearen Form der Reichweite auf einer doppelt logarithmischen Skala liegt die Vermutung nahe, daß es einen Zusammenhang der Art

$$R \propto E^b$$

gibt. Tatsächlich ergibt sich aus der Berechnung (mit $dE/dx \propto 1/E$)

$$R \propto E^2$$

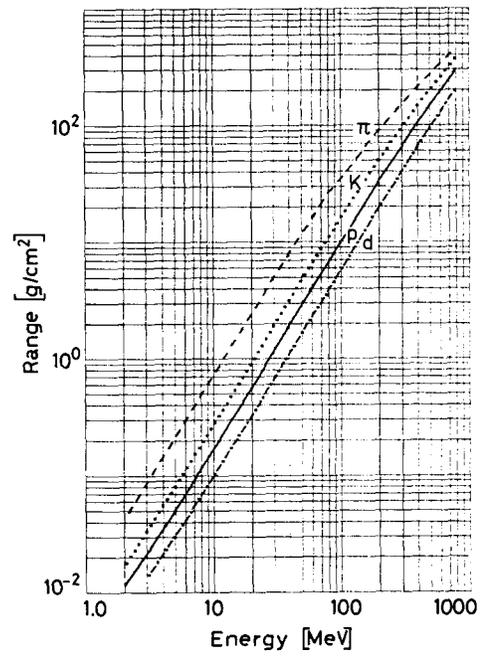


Abbildung 10: Berechnete Reichweitenkurven von verschiedenen schweren Teilchen in Aluminium.

und aus einem besseren Fit der Kurve

$$R \propto E^{1.75}. \quad (90)$$

Die Kenntnis der Reichweite und des Zusammenhanges Reichweite - Energie des Teilchens ist von großer Bedeutung bei der Konstruktion von Detektoren und bei der Bestimmung der Dicke einer Abschirmvorrichtung gegenüber Strahlung.

1.3.6 Verhalten der Bethe - Bloch Formel bei hohen Teilchengeschwindigkeiten

Nimmt man die Bethe - Bloch Formel Gl.(72) und betrachtet sie im Grenzfall $\beta\gamma \rightarrow \infty$, so kann man folgende Abschätzung machen: Für $m_{Teilchen} \gg m_e$ gilt die Näherung

$$W_{max} \simeq 2m_e c^2 (\beta\gamma)^2,$$

daraus folgt für den logarithmischen Term in Gl.(72):

$$\begin{aligned} \ln \frac{2m_e c^2 (\beta\gamma)^2 W_{max}}{I^2} &= \ln \frac{4m_e^2 c^4 (\beta\gamma)^4}{I^2} = \\ &= 2 \cdot \ln \frac{2m_e c^2 (\beta\gamma)^2}{I} \end{aligned} \quad (91)$$

Der zweite von der Geschwindigkeit abhängige Parameter in Gl.(72) ist der δ -Term. Bei hohen Geschwindigkeiten gilt:

$$\begin{aligned} \delta &= 4.6052 \log_{10}(\beta\gamma) + C_0 = \frac{4.6052}{\ln 10} \ln(\beta\gamma) + C_0 = \\ &= \frac{4.6052}{2.3026} \ln(\beta\gamma) + C_0 = 2 \cdot \ln(\beta\gamma) + C_0. \end{aligned} \quad (92)$$

Die Konstante C_0 ist vom Ionisationspotential und der Plasmafrequenz abhängig und bei hohen Geschwindigkeiten vernachlässigbar. Im Grenzfall $\beta\gamma \rightarrow \infty$ gilt damit:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\gamma \rightarrow \infty} \frac{dE}{dx} &= const. \cdot \left(\ln \frac{2m_e c^2 (\beta\gamma)^2}{I} - \ln(\beta\gamma) \right) = \\ &= a + b \ln(\beta\gamma). \end{aligned} \quad (93)$$

Bei der „normalen“ Bethe - Bloch Formel steigt der Energieverlust logarithmisch mit $\ln(\beta\gamma)$ ¹¹. Das heißt aber auch, daß es dabei kein „Plateau“ geben wird, von welchem in der Literatur häufig die Rede ist. Diese Abschätzung ist auch unabhängig von der Art des verwendeten Absorbermaterial - ob Gase oder Festkörper. Zu einem Plateau kommt es dann, wenn für W_{max} ab einer bestimmten Teilchenenergie ein cut - off Parameter eingeführt wird, abhängig von der Dicke des Teilchendetektors. Mehr dazu in Kapitel (1.6.2).

¹¹siehe [4], S.1252

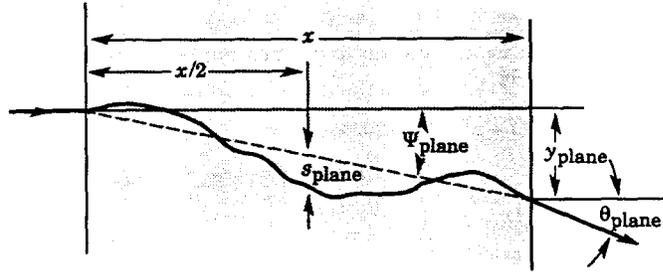


Abbildung 11: Multiple Scattering eines geladenen Teilchens.

1.3.7 Vielfachstreuung (Multiple Coulomb Scattering)

Neben der Änderung der Energie eines durchgehenden Teilchens stellt sich als zweite Frage die Ablenkung vom ursprünglichen Weg. Rein formal setzt sich der gesamte Wirkungsquerschnitt aus dem Wirkungsquerschnitt für *inelastische* Streuung (aus welchem sich die Bethe - Bloch Formel ableitet) und dem für *elastische* Streuung (am Kernpotential) zusammen. Der Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung ist gegeben durch die Rutherford Formel,

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{el.} = z_1^2 z_2^2 r_e^2 \frac{(\frac{m_e c}{\beta p})^2}{4 \sin^4(\frac{\theta}{2})}. \quad (94)$$

Während durch inelastische Streuung der (schweren) Teilchen an den Elektronen diese kaum oder nur vernachlässigbar abgelenkt werden, ist die elastische Streuung maßgeblich für die Ablenkung. Wegen der $\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$ - Abhängigkeit ist die Mehrzahl der Ablenkungen durch kleine Winkel gegeben (siehe Kapitel (1.2.2)). Außerdem wird davon ausgegangen, daß der Kern in Ruhe bleibt (kein Energieübertrag auf den Kern). Der Weg des Teilchens ist dann ein zufällige zick - zack Kurve durch das Absorbermaterial (siehe Abb.(11)).

Der Effekt macht sich in einer Abweichung von der ursprünglichen Richtung des Teilchens bemerkbar. Man kann die Coulomb Streuung in drei Bereiche einteilen:

- *Einzelstreuung*, wenn der Absorber sehr dünn ist, so daß die Wahrscheinlichkeit von mehr als einer Coulomb Streuung klein ist. Dann ist die Winkelverteilung durch die einfache Rutherfordstreuung gegeben.
- *Mehrfachstreuung*, wenn die Anzahl der Streuungen $N < 20$ ist. In diesem Fall ist eine Beschreibung sehr schwierig, da weder statistische Methoden noch die einfache Rutherfordstreuung angewendet werden können.
- *Vielfachstreuung*, wenn die mittlere Anzahl von Streuungen $N > 20$ ist und der Energieverlust an den Kernen klein oder vernachlässigbar ist. In diesem

Fall kann das Problem statistisch behandelt werden, um eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die resultierende Ablenkung als Funktion der Dicke des durchquerten Materials zu erhalten.

Die Coulomb Streuung wird durch die Theorie von Molière gut beschrieben. Die Verteilung der Winkel bei der Coulombstreuung ist für kleine Winkel gaußförmig (folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz), bei größeren Winkeln verhält sie sich wie Rutherfordstreuung, mit größeren Schwänzen als die Gaußverteilung. Für die zentralen 98% der projizierten Winkelverteilung genügt es oft eine Gauß Näherung zu machen mit der Breite

$$\theta_0 = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left[1 + 0.038 \ln\left(\frac{x}{X_0}\right) \right]. \quad (95)$$

Dabei wurde

$$\theta_0 = \sqrt{\langle \theta_{plane}^2 \rangle} \quad (96)$$

festgelegt (siehe Abb(11)). X_0 ist die Strahlungslänge, gegeben durch

$$X_0 = \frac{716.4 \frac{g}{cm^2} A}{Z(Z+1) \ln\left(\frac{287}{\sqrt{Z}}\right)}. \quad (97)$$

Dieser Wert von θ_0 ist von einer Anpassung der Molièreverteilung für einfach geladene Teilchen mit $\beta=1$ für alle Z . Die Genauigkeit liegt bei 11% oder besser für $10^{-3} < \frac{x}{X_0} < 100$. Gl.(95) enthält einen logarithmischen Term, welcher natürlich nicht additiv ist unter einer Faltung. Dieser Term kommt daher, daß man die Rutherford - Schwänze „wegschneidet“, weshalb man ja nur die zentralen 98% berücksichtigt. Dieser Ansatz ist zwar unphysikalisch, die erhaltenen Daten können aber damit bestmöglich approximiert werden (gefittet). In Gl.(97) ist das Argument des logarithmischen Terms ebenfalls das Ergebnis einer numerischen Anpassung und nicht Konsequenz physikalischer Überlegungen. Die Verteilung der projizierten Winkel θ_{plane} ist näherungsweise gegeben durch

$$P(\theta_{plane}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_0} e^{-\frac{\theta_{plane}^2}{2\theta_0^2}} d\theta_{plane}. \quad (98)$$

In Abb.(11) sind noch einige weitere Größen zur Beschreibung von Multiple Coulomb Scattering gezeigt. Die Zusammenhänge sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle \psi_{plane}^2 \rangle} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \theta_0, \\ \sqrt{\langle y_{plane}^2 \rangle} &= \frac{1}{\sqrt{3}} x \theta_0, \\ \sqrt{\langle s_{plane}^2 \rangle} &= \frac{1}{4\sqrt{3}} x \theta_0. \end{aligned} \quad (99)$$

Es sei nochmal darauf hingewiesen, daß diese quantitativen Größen nur bei kleinen θ_0 und ohne Berücksichtigung der Rutherfordstreuung einen Sinn ergeben.

1.4 Die Energieverlustverteilung (Landau, Vavilov)

Unter Energieverlust war bisher der *mittlere* Energieverlust zu verstehen, wenn ein geladenes Teilchen durch eine Schicht Materie hindurchfliegt. Für ein beliebiges geladenes Teilchen wird der Energieverlust aber nicht gleich dem Mittelwert sein aufgrund von statistischen Schwankungen, welche sich in der Anzahl der Kollisionen und im Energietransfer in jeder Kollision ergeben. Ein zu Beginn monoenergetischer Teilchenstrahl wird daher nach dem Durchgang durch eine Materieschicht einer bestimmten Dicke eine Verteilung in der Energie zeigen, die ungleich der Deltafunktion ist.

1.4.1 Dicke Absorber: Die Gaußverteilung als Grenzfall

Der *zentrale Grenzwertsatz* besagt, daß sich die Summe von N Zufallsvariablen, die alle der gleichen statistischen Wahrscheinlichkeitsdichte Verteilung folgen, einer gaußverteilten Variablen annähert im Grenzwert $N \rightarrow \infty$ ¹². Nimmt man als Zufallsvariable δE den Energieverlust in einer einzigen Kollision, und nimmt man weiters an, daß die Geschwindigkeitsänderung des Teilchens vernachlässigbar ist, dann ist der gesamte Energieverlust die Summe vieler unabhängiger δE s. Daher hat für relativ dicke Absorber, in denen es zu einer genügenden Anzahl von Stößen kommt, die Energieverlustverteilung eine Gaußform:

$$f(\Delta; x) \propto e^{-\frac{(\Delta-\bar{\Delta})^2}{2\sigma^2}} \quad (100)$$

x... Absorberdicke,
 Δ ... Energieverlust im Absorber,
 $\bar{\Delta}$... mittlerer Energieverlust im Absorber,
 σ ... Standardabweichung.

Für nichtrelativistische Teilchen wurde die Breite der Gaußkurve von Bohr berechnet zu:

$$\sigma_0^2 = 4\pi N_a r_e^2 (m_e c^2)^2 \rho \frac{Z}{A} x = 0.1569 \rho \frac{Z}{A} x [MeV^2], \quad (101)$$

mit N_a der Avogadrokonstante, r_e und m_e dem klassischen Elektronenradius und der Elektronenmasse, ρ der Materialdichte, Z der Kernladungszahl und A dem Atomgewicht des Materials. Für relativistische Teilchen kann diese Formel leicht erweitert werden zu

$$\sigma^2 = \frac{(1 - \frac{1}{2}\beta^2)}{1 - \beta^2} \sigma_0^2. \quad (102)$$

In **sehr dicken** Absorbern ist die Annahme der vernachlässigbaren Geschwindigkeitsänderung des einfallenden Teilchens nicht mehr gültig. Dieser Fall muß getrennt betrachtet werden [6].

¹²Wegen der großen Schiefe der Landauverteilung ist diese Konvergenz nur sehr schwach. Zu beachten ist, daß im Experiment immer eine obere Grenze für den größtmöglichen Energieübergang existiert, weshalb die „experimentellen“ Landauverteilungen immer normierbar sind und der zentrale Grenzwertsatz anwendbar ist.

1.4.2 Dünne Absorber: Die Landauverteilung

Für eine genaue Ableitung sei auf die Originalarbeit von L. Landau verwiesen [5]. Wenn die Anzahl an Kollisionen (wie in dünnen Absorbern) zu gering ist, damit der zentrale Grenzwertsatz gültig ist, wird es schwer, die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu berechnen. L. Landau war der erste, dem dies gelungen ist. Die Probleme entstehen dadurch, daß in dünnen Absorbern die Wahrscheinlichkeit eines großen Energieübertrages in einer einzelnen Kollision besteht und somit zu einer asymmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion führt. Während diese Ereignisse selten sind, so trägt ihre Wahrscheinlichkeit zu einem langen Schwanz auf der hochenergetischen Seite der Energieverlust Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung bei. Dem Maximum dieser Verteilung entspricht nun der *wahrscheinlichste* Energieverlust und nicht mehr - wie bei der Gaußverteilung - dem mittleren Energieverlust. Die theoretischen Berechnungen dieser Verteilungskurve wurden von Landau und später Vavilov durchgeführt und unterscheiden sich in ihrer Anwendbarkeit durch den Parameter

$$\kappa = \frac{\bar{\Delta}}{W_{max}}, \quad (103)$$

das heißt dem Verhältnis aus mittlerem Energieverlust und dem maximalen Energieübertrag, welcher in einer einzigen Kollision erlaubt ist. Der mittlere Energieverlust kann aus der Bethe - Bloch Formel berechnet werden. Es ist üblich, den mittleren Energieverlust $\bar{\Delta}$ durch

$$\bar{\Delta} \simeq \xi = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 x \quad (104)$$

anzunähern. Für einen dünnen Absorber ist der Gültigkeitsbereich generell $\kappa < 10$, obwohl für $\kappa > 1$ die Verteilung bereits einer Gaußkurve sehr ähnlich sieht. Für $\kappa > 10$ wird der Unterschied tatsächlich vernachlässigbar. Zur Veranschaulichung sei die Originalkurve von L. Landau in Abb.(12) gezeigt.

L. Landau war der erste, der den Energieverlust für sehr dünne Absorber ($\kappa \leq 0.01$) berechnete. Dabei traf er folgende Annahmen:

- der maximale erlaubte Energieübertrag kann unendlich sein, das heißt $W_{max} \rightarrow \infty$ und damit $\kappa \rightarrow 0$;
- der einzelne Energieübertrag ist groß, so daß die Elektronen als frei betrachtet werden können; das heißt aber auch, daß kleine Energieüberträge aus Fernstreuungen vernachlässigt werden;
- die Geschwindigkeitsänderung des Teilchens ist vernachlässigbar, das heißt das Teilchen behält eine konstante Geschwindigkeit.

Die gesuchte unbekannte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(\Delta; x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Teilchen mit einer bestimmten Energie E beim

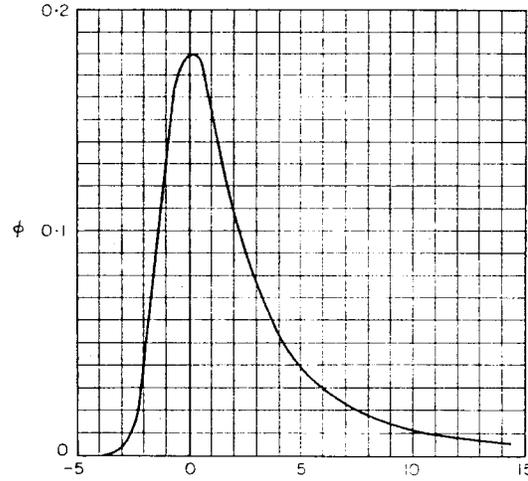


FIG. 1.

Abbildung 12: Die Landauverteilung, wie sie erstmals von L. Landau berechnet wurde [5].

Durchgang durch eine Schicht Materie einen Energiebetrag zwischen $[\Delta, \Delta + d\Delta]$ verliert. Außerdem soll die Funktion f normalisiert sein: $\int f d\Delta = 1$. Landau kam zu folgendem Ergebnis für seine Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung:

$$f(\Delta; x) = \frac{1}{\xi} \Phi(\lambda)$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u \ln u - \lambda u} \sin(\pi u) du$$

$$\lambda = \frac{1}{\xi} [\Delta - \xi (\ln \xi - \ln \epsilon + 1 - C)] \quad (105)$$

Dabei sind $C = 0.577 \dots$ die Eulersche Konstante und

$$\ln \epsilon = \ln \frac{(1 - \beta^2) I^2}{2mc^2 \beta^2} + \beta^2.$$

Die Funktion nimmt ein Maximum (Wahrscheinlichster Wert) bei

$$\Delta_0 = \xi (\ln \xi - \ln \epsilon + 0.37) \quad (106)$$

Die Größe ϵ steht für den kleinsten erlaubten Energieübertrag. Die Funktion $\phi(\lambda)$ hängt nur vom Parameter λ ab und muß numerisch berechnet werden.

Die Landauverteilung für verschiedene κ ist in Abb.(13) zu sehen.

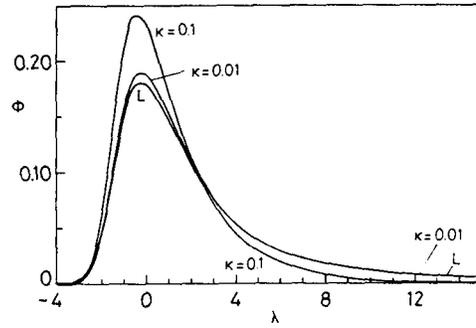


Abbildung 13: Landau Verteilungen für verschiedene κ (L = Landau $\equiv \kappa=0$).

Führt man statt λ eine neue Größe ω ein, für die gilt:

$$\lambda = \omega + \ln \omega + A \quad (107)$$

Am Maximum gilt für $A = C-1$ und für λ

$$\frac{\Delta - \Delta_0}{\xi} = \omega + \ln \omega - 0.37, \quad (108)$$

und für $\phi(\lambda)$ kann geschrieben werden:

$$\phi = \frac{1}{\omega(\omega + 1)} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \quad (109)$$

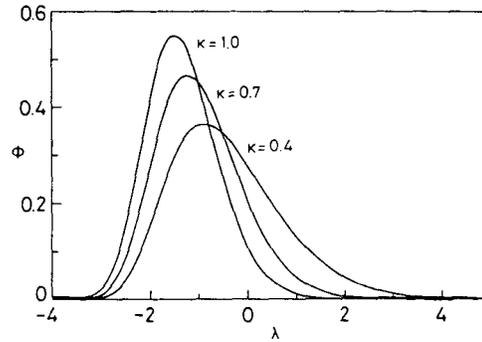
Für Werte von κ zwischen den Bereichen, die von Landau auf der einen Seite und dem gaußschen Limit auf der anderen Seite begrenzt sind, wurden durch Symon und Vavilov theoretisch untersucht. Während Symons Resultate in graphischer Form erhielt, stellen die Formeln von Vavilov eine Verallgemeinerung der Berechnung von Landau dar. Für $\kappa \rightarrow 0$ geht die Vavilovverteilung über in eine Landauverteilung und für $\kappa \rightarrow \infty$ geht sie über in eine Gaußverteilung. Wie diese Verteilung in eine Gaußverteilung übergeht, ist in Abb.(14) zu sehen.

1.4.3 Mathematische Eigenschaften der Landauverteilung

Wie oben bereits angesprochen, kann für die Landauverteilung $f(\Delta; x)$ keine analytische Formel angegeben werden. Jedoch kann für ihre Laplactransformierte eine analytische Formel gefunden werden, im allgemeinsten Fall

$$\phi(s) = e^{s \ln s} \quad (110)$$

Die Rücktransformation ist nur numerisch möglich. Die Landauverteilung besitzt folgende Eigenschaften:

Abbildung 14: Vavilov Verteilungen für verschiedene κ .

- Die Landauverteilung ist eine stabile Verteilung, das heißt das Produkt zweier Landauverteilungen ist wieder eine Landauverteilung. Das hat folgende Konsequenzen:
 - Unter einer linearen Transformation $y = ax + b$ geht eine „standard“ Landauverteilung über in eine Landauverteilung mit dem Skalenparameter a und dem Ortsparameter b . Seine Laplacetransformierte ist dann gegeben durch

$$\phi(s) = e^{-bs + as \ln(as)}. \quad (111)$$

- Der Ort des Maximums befindet sich bei

$$M = b - 0.22a,$$

die Breite der Landauverteilung in halber Höhe des Maximums ist gegeben durch

$$\sigma = 4.02a.$$

Die Breite σ ist komplett unabhängig von den Beobachtungen im Schwanz der Verteilung und kann daher als robuste Schätzung des Skalenparameters verwendet werden. Der Median (Punkt, an welchem die Fläche der Landauverteilung in zwei gleiche Hälften geteilt wird) ist gegeben durch

$$m = b + 1.36a.$$

- Das Produkt von zwei Landauverteilungen mit den Skalenparametern a_i und Ortsparametern b_i hat folgende Laplacetransformierte:

$$\psi(s) = e^{-(b_1+b_2)s + a_1 s \ln(a_1 s) + a_2 s \ln(a_2 s)} \quad (112)$$

Dies wiederum ist eine Landauverteilung mit den folgenden Orts- und Skalenparametern b und a :

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2 + a \ln a - a_1 \ln a_1 - a_2 \ln a_2 \quad (113)$$

- Die Landauverteilung hat keine Momente gleich welcher Ordnung, das heißt es gibt keinen Mittelwert (Moment erster Ordnung um Null) und keine Varianz (Moment zweiter Ordnung um den Mittelwert). Das führt zu vielen Problemen in der Praxis.
- Während bei der Gaußverteilung die Varianz (Quadrat der Standardabweichung \equiv Skalenparameter \equiv Breite der Gaußkurve) additiv ist unter der Faltung zweier Gaußverteilungen, so ist es bei der Landauverteilung der Skalenparameter a selbst, welche unter der Faltung zweier Landauverteilungen additiv ist. Dagegen ist bei der Landauverteilung der Ortsparameter b nicht additiv unter der Faltung zweier Landauverteilungen, während bei der Gaußverteilung der Mittelwert (\equiv Ortsparameter \equiv Maximum) additiv unter einer Faltung ist. Dem Ortsparameter b entspricht also bei einer Gaußverteilung der Mittelwert, dem Skalenparameter a der Standardabweichung.

Die Tatsache, daß keine Momente existieren, läßt sich leicht daran erkennen, daß der Schwanz auf der hochenergetischen rechten Seite wie $\frac{1}{E^2}$ abfällt¹³. Nun kann man argumentieren, daß es keinen unendlichen Energieübertrag gibt und einen cut-off Wert anbringen, zum Beispiel bei der Energie des einfallenden Teilchens. Dadurch gehen aber die Faltungseigenschaften verloren, die durchaus physikalisch begründet sind: Teilt man ein Gasvolumen in zwei Hälften, so ist der gesamte Energieverlust die Summe der beiden Teile.

Wenn es notwendig ist, kann die Landauverteilung mit einer Gaußverteilung überlagert werden, um Meßfehler der einzelnen Energieverlustmessungen zu berücksichtigen. Aber auch dabei gehen die Faltungseigenschaften verloren.

13

$$\frac{d\sigma}{dE} = \underbrace{\frac{d\sigma}{db}}_{\sim b} \underbrace{\frac{db}{dE}}_{\sim \frac{b}{E}} \sim \frac{b^2}{E} \sim \frac{1}{E^2}$$

1.5 Zusammenfassung: Energieverlust

- $\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}$ ist nur schwach absorberabhängig und beträgt $\sim 2 \frac{MeV}{g} cm^2$.
- Ist die Teilchenenergie höher als die maximale Ionisationsenergie, so läßt sich die dE/dx Kurve in drei Geschwindigkeitsbereiche zerlegen:
 - Der Bereich unterhalb des Maximums für dE/dx (in der Hochenergiephysik kaum von Bedeutung),
 - der Bereich zwischen Maximum und Minimum (in welchem Teilchenidentifizierung mit der dE/dx - Methode gut möglich ist),
 - der Bereich zwischen minimaler Ionisation und dem relativistischen Anstieg mit $\ln(\beta\gamma)$ im Hochenergie Bereich. Hier kann die dE/dx Methode nur eingeschränkt angewendet werden.
- Der Energieverlust ist ein statistischer Vorgang, was mitunter zu nicht ganz einfachen Kosequenzen führt (straggling, Landau).

1.5.1 Vergleich Bohr, Bethe, Bloch

Die drei Formeln für den Energieverlust unterscheiden sich primär durch ihre Parametrisierung:

- Bohr verwendete das anschauliche, aber unphysikalische (weil unmeßbare) Konzept des Stoßparameters. In dieser Parametrisierung erhält er zwar den richtigen Vorfaktor, aber der logarithmische Term liefert zu große Werte. Diese Formel beschreibt nur relativ langsame, sehr schwere Teilchen mit akzeptabler Genauigkeit.
- Bethe (1933) ist der erste, der das Konzept der klassischen Quantenmechanik (Wirkungsquerschnitt) verwendet und an Stelle der Stoßparameter den Impulsübertrag als Parameter verwendet. Er führt ebenfalls als erster einen neuen und wichtigen Parameter ein, das *mittler Ionisationspotential*. Es errechnet sich aus den Oszillatorstärken der Elektronen im Atom und bildet dadurch eine neue untere Grenze für den minimalen Energieübertrag. Die Werte für den Energieverlust werden dadurch genauer (und physikalisch plausibler), liefert für hohe Teilchenenergien aber noch immer falsche Werte.

Vergleicht man die differentiellen Wirkungsquerschnitte der beiden Formeln, so unterscheiden sie sich rein äußerlich nur dadurch, daß bei Bethe an Stelle der Ordnungszahl Z der Formfaktor F steht:

$$d\sigma_{Bohr}(E) = \frac{\kappa}{E^2} \cdot dE \cdot Z, \quad d\sigma_{n,(Bethe)}(E) = \frac{\kappa}{E^2} \cdot dE \cdot |F_n|^2. \quad (114)$$

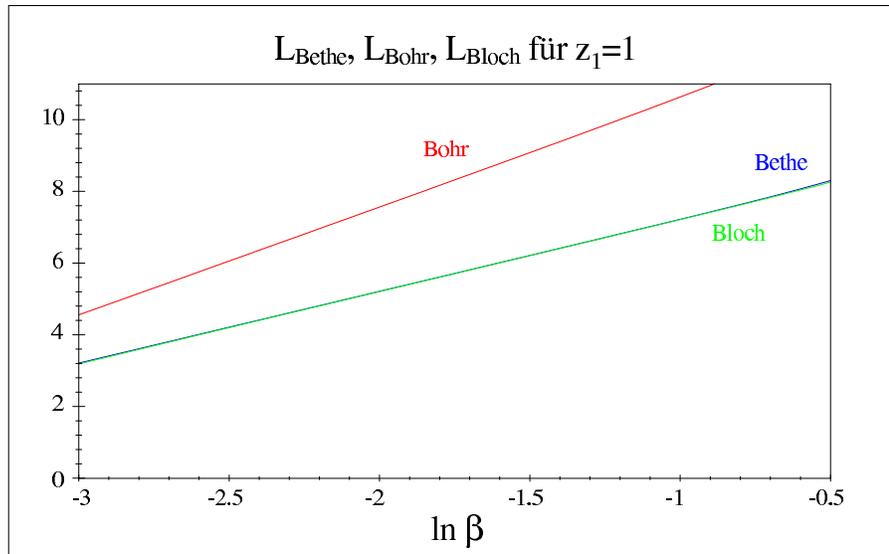


Abbildung 15: Vergleich der unterschiedlichen Werte des logarithmischen Terms der Bohr - Bethe - Bloch Formeln.

Beide Formeln haben die Eigenschaft, wenn man an Stelle der eigenen Parametrisierung die bei einem Stoß übertragbare Energie als Integrationsparameter heranzieht, daß die Werte für den Energieverlust nur noch halb so groß sind wie tatsächlich gegeben. Das kommt daher, da sowohl $E \propto \frac{1}{b^2}$ und $E \propto p^2$ gilt, was sich beim Logarithmus dann in Form eines Faktors 2 auswirkt:

$$\ln \frac{E_{max}}{E_{min}} = 2 \ln \frac{b_{min}}{b_{max}} = 2 \ln \frac{p_{max}}{p_{min}}$$

Letzteres ist eine direkte Konsequenz der Verwendung der klassischen Quantenmechanik zur Beschreibung der Atomhülle: $H = \frac{p^2}{2m} + V$.

- Erst durch die Verwendung der Diracgleichung zur Beschreibung der Atomhülle macht das Problem unabhängig von seiner Parametrisierung. Dies wurde erstmals von Bloch (1935) getan.
- Für gewöhnlich fügt man zur Bethe - Bloch Formel noch zwei semi - empirische Korrekturen hinzu, die die Bethe - Bloch Formel für niedrige und hohe Teilchenenergien korrigieren (Schalenkorrektur C und Dichtekorrektur δ).

Die unterschiedlichen Werte für den logarithmischen Term sind in Abb.(15) zu sehen.

1.5.2 Energieverlustverteilung

- Der Energieverlust ist ein statistischer Vorgang, er wird durch die Landauverteilung beschrieben.

- Die Landauverteilung besitzt keine Momente, aber das Produkt aus zwei Landauverteilungen ist wieder eine Landauverteilung (Faltung).
- Nur die Laplacetransformierte der Landauverteilung existiert analytisch, die Landauverteilung selbst erhält man numerisch aus der Rücktransformation.
- Bringt man einen „Cut-off“ Parameter für den maximalen Energieübertrag an, existieren zwar die ersten beiden Momente, diese sind aber sehr stark vom angebrachten „Cut-off“ Parameter abhängig und daher mit Vorsicht zu genießen. Außerdem gehen damit die Faltungseigenschaften verloren, die durchaus einen physikalischen Sinn haben.
- Dagegen ist der „wahrscheinlichste“ Wert (Maximum der Landauverteilung) relativ unempfindlich gegenüber jeder Art von Cut-off.

1.6 Energieverlust in Silizium Halbleiterdetektoren

In diesem Abschnitt soll konkret auf den Energieverlust in Silizium eingegangen werden, wie er für die Teilchenidentifizierung und Verifizierung von Messergebnissen notwendig ist. Es hat sich dabei herausgestellt, daß der *restricted energyloss* eine zentrale Rolle spielt bei der Erklärung der Messergebnisse.

1.6.1 Berechnete dE/dx Werte in Silizium

Gl.(72) wurde für mehrere Teilchen (Myonen, Pionen und Protonen) in Silizium numerisch ausgewertet. Die Ergebnisse sind in graphischer und Tabellarischer Form gezeigt. In Abb.(16) sind die numerisch erhaltenen dE/dx Ergebnisse in Abhängigkeit vom Teilchenimpuls gezeigt. Den Teilchenimpuls erhält man zum Beispiel aus einem Spektrometer. Mit der zusätzlichen Messung von dE/dx des Teilchens kann man aus beiden Messungen die Masse desselben bestimmen.

Verwendete Werte zur Berechnung von Gl.(72) für Silizium.[15]								
Z	A	$\rho [\frac{g}{cm^3}]$	I [eV]	-C	X_0	X_1	m	a
14	28.01	2.33	173	4.435	0.2014	2.8715	3.2546	0.1492

Das mittlere Ionisationspotential I ist über die Oszillatorstärken der Elektronen im Atom definiert. Bei Silizium liefert nur die M- Schale (Valenzelektronen) Beiträge zu I.

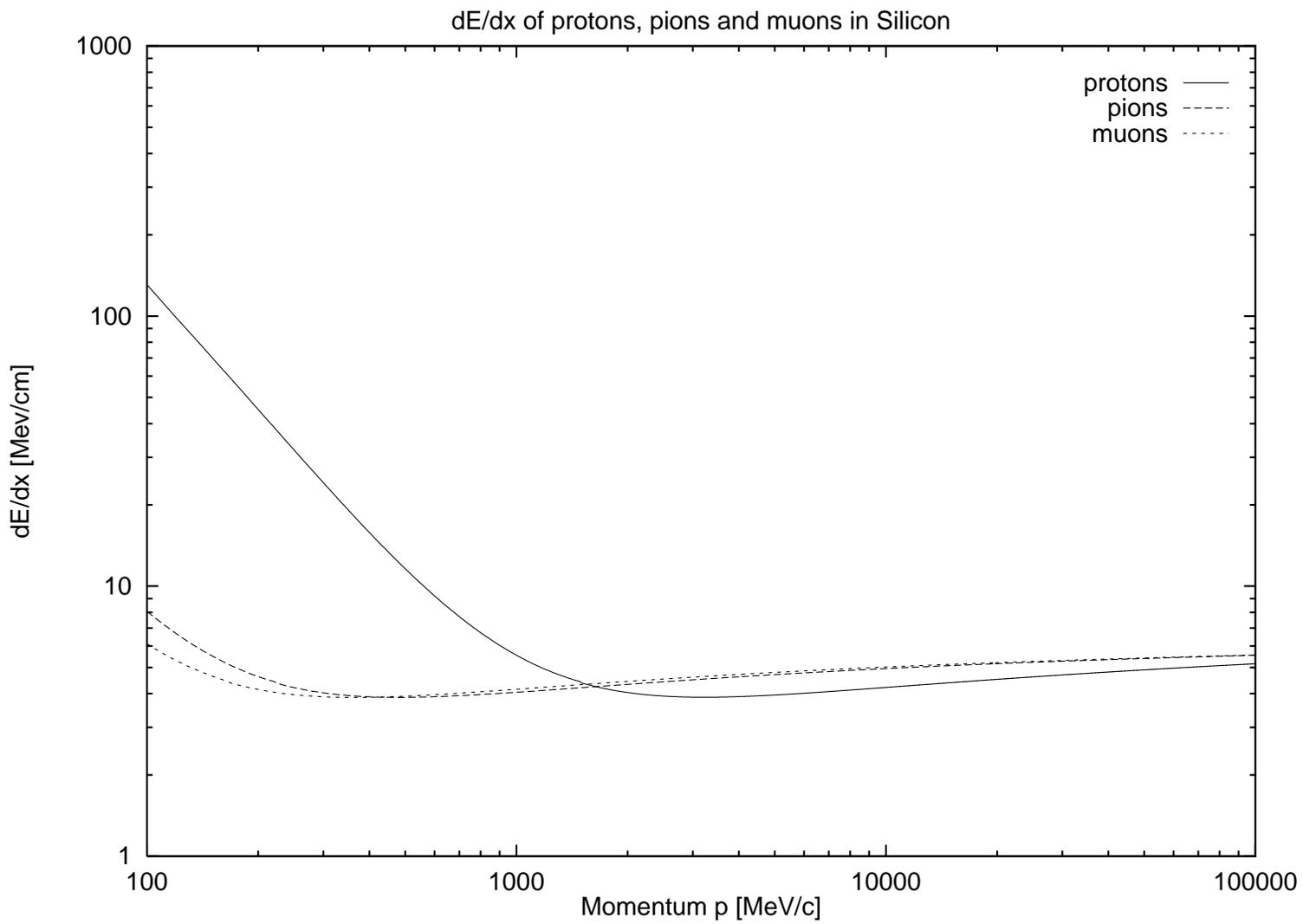


Abbildung 16: Energieverlustkurven in Silizium.

dE/dx in Silizium			
p [MeV/c]	$(dE/dx)_{p^+}$ [MeV/cm]	$(dE/dx)_{\pi^+}$ [MeV/cm]	$(dE/dx)_{\mu^+}$ [MeV/cm]
100	130.821	8.062	6.108
200	45.103	4.625	4.144
300	24.168	4.028	3.895
400	15.791	3.894	3.878
500	11.598	3.876	3.914
600	9.204	3.896	3.964
700	7.713	3.930	4.015
800	6.725	3.969	4.064
900	6.040	4.008	4.110
1000	5.549	4.046	4.152
2000	4.037	4.330	4.440
3000	3.882	4.500	4.603
4000	3.900	4.616	4.712
5000	3.953	4.703	4.792
6000	4.012	4.771	4.855
7000	4.070	4.827	4.907
8000	4.123	4.875	4.950
9000	4.172	4.915	4.986
10000	4.217	4.951	5.018
20000	4.518	5.163	5.209
30000	4.691	5.273	5.307
40000	4.809	5.344	5.371
50000	4.898	5.397	5.419
60000	4.969	5.438	5.457
70000	5.028	5.472	5.489
80000	5.078	5.500	5.516
90000	5.122	5.525	5.539
100000	5.160	5.547	5.560

Die Geschwindigkeit ($\beta\gamma$) sollte für alle Teilchen im MIP ungefähr gleich sein. In diesem Fall würden die dE/dx Kurven der Teilchen zusammen fallen. Die Werte von $\beta\gamma$ im MIP sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Minimum im Energieverlust bei Silizium			
	$(dE/dx)_{min}$ [MeV/cm]	p_{min} [MeV/c]	$\beta\gamma$
p^+	3.880	3222	3.434
π^+	3.875	481	3.446
μ^+	3.874	365	3.453

1.6.2 „Restricted Energy Loss“ bei dünnen Detektoren

Die Bethe - Bloch Formel Gl.(72) gibt immer den mittleren Energieverlust eines Teilchens im entsprechenden Material an. Bei dünnen Halbleiterdetektoren (Standard Si- Detektor mit $300\mu\text{m}$) und hochenergetischen Teilchen kann es vorkommen, daß hochenergetische knock-on oder δ - Elektronen, die bei Frontalzusammenstößen aus dem Atom herausgeschlagen werden, aus dem Detektor wegen ihrer hohen Energie entweichen. Diese Elektronen tragen dann nicht mehr zur Gänze zur Signalbildung im Detektor bei. Man muß nun unterscheiden zwischen der im Detektormaterial *abgegebenen* Energie (also dem Energieverlust) des Teilchens), und der durch den Detektor *gemessenen* Energie, die nicht mehr gleich der abgegebenen Energie sein muß, wenn Elektronen eine entsprechend hohe Energie besitzt, um aus dem Detektor entweichen können. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, modifiziert man Gl.(72):

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z z^2}{A \beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{upper}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \left(1 + \frac{W_{upper}}{W_{max}} \right) - \delta - 2\frac{C}{Z} \right], \quad (115)$$

mit $W_{upper} = \inf(W_{cut}, W_{max})$. W_{cut} hängt von der Dicke des Detektors und vom Impuls des einfallenden Teilchens ab. W_{max} verhält sich wie

$$W_{max} = \frac{2m_e c^2 (\beta\gamma)^2}{1 + 2s\sqrt{1 + (\beta\gamma)^2} + s^2} \simeq 2m_e c^2 (\beta\gamma)^2,$$

wenn $s = m_e/M$ klein ist. Dieses W_{max} hat in dieser Näherung die gleiche Form wie der im Logarithmus vor ihm stehende Term. In der folgenden Berechnung von W_{cut} wurde von der Annahme ausgegangen, daß für

$$\kappa = \frac{(dE/dx) \cdot \Delta x}{W_{max}} \geq 10$$

die Energieverlustverteilung der einer Gaußverteilung entspricht ($\Delta x =$ Dicke des Absorbers). Solange dieses Limit nicht unterschritten wird, kann die normale Bethe - Bloch Formel (72) zur Berechnung von dE/dx verwendet werden, wird dieses Limit unterschritten, tritt Formel Gl.(115) in Kraft, und

$$W_{cut} = W_{max} @ \kappa = 10.$$

Zum Vergleich ist in den Bildern auch eine Kurve für

$$W_{cut} = W_{max@kappa} = 1$$

gezeigt. Für die folgende Analyse und Vergleiche werden aber ausschließlich die Werte für $\kappa = 10$ verwendet. Durch die Einführung eines cut - off Parameters entsteht jetzt auch ein „Plateau“ im hochenergetischen Bereich der dE/dx Kurve:

$$\begin{aligned} \ln \frac{2m_e c^2 (\beta\gamma)^2 W_{max}}{I^2} &= \ln \frac{4m_e^2 c^4 (\beta\gamma)^4}{I^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \ln \frac{2m_e c^2 (\beta\gamma)^2 W_{upper}}{I^2} = const. + 2 \ln(\beta\gamma). \end{aligned} \quad (116)$$

Am δ - Term ändert sich nichts, daher

$$\delta = 2 \ln(\beta\gamma) + C_0. \quad (117)$$

Daher löschen sich jetzt der logarithmische und δ - Term gegenseitig aus, und es entsteht ein Plateau. Wann das Plateau beginnt und wie hoch es ist im Vergleich zum MIP, wird durch den cut - off Parameter für W_{max} bestimmt. Physikalisch kann man das so sehen, daß sich ab einer gewissen Teilchenenergie ein Gleichgewicht einstellt zwischen der Anzahl der erzeugten Elektronen und der aufgrund ihrer höheren Energie aus dem Detektor entweichenden Elektronen. Bei einer noch höheren Teilchenenergie werden mehr Elektronen erzeugt, aber gleichzeitig entweichen noch mehr escape - Elektronen, und die im Detektor verbleibende Ladung bleibt konstant. Es stellt sich heraus, daß die dE/dx Werte bei einem cut - off zum Teil erheblich unter jenen liegen, als in Gl.(72).

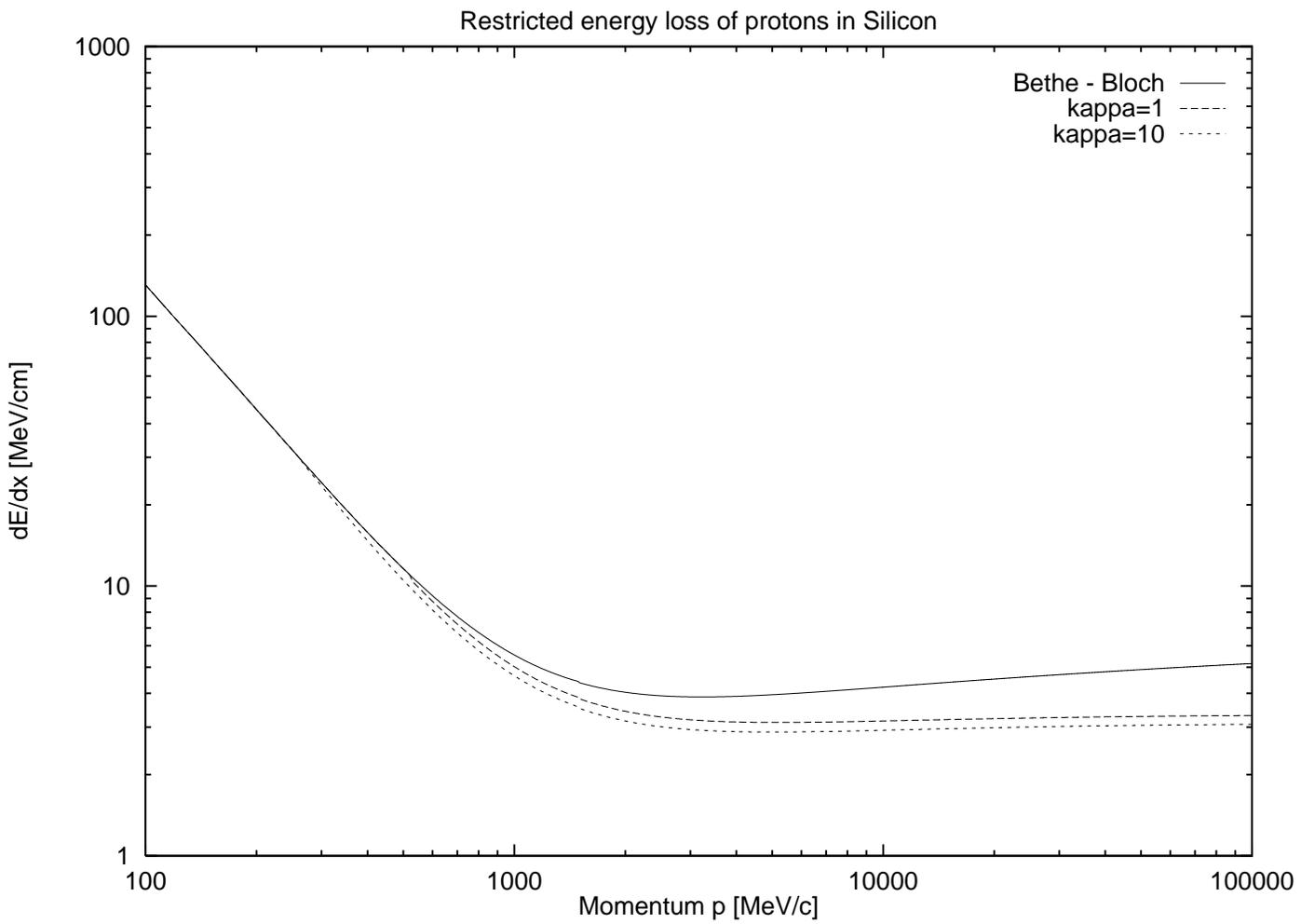


Abbildung 17: dE/dx von Protonen. Die durchgehende Linie zeigt dE/dx nach Gl. (72), die beiden anderen Kurven dE/dx Werte in $300 \mu\text{m}$ Silizium und verschiedenen cut - offs.

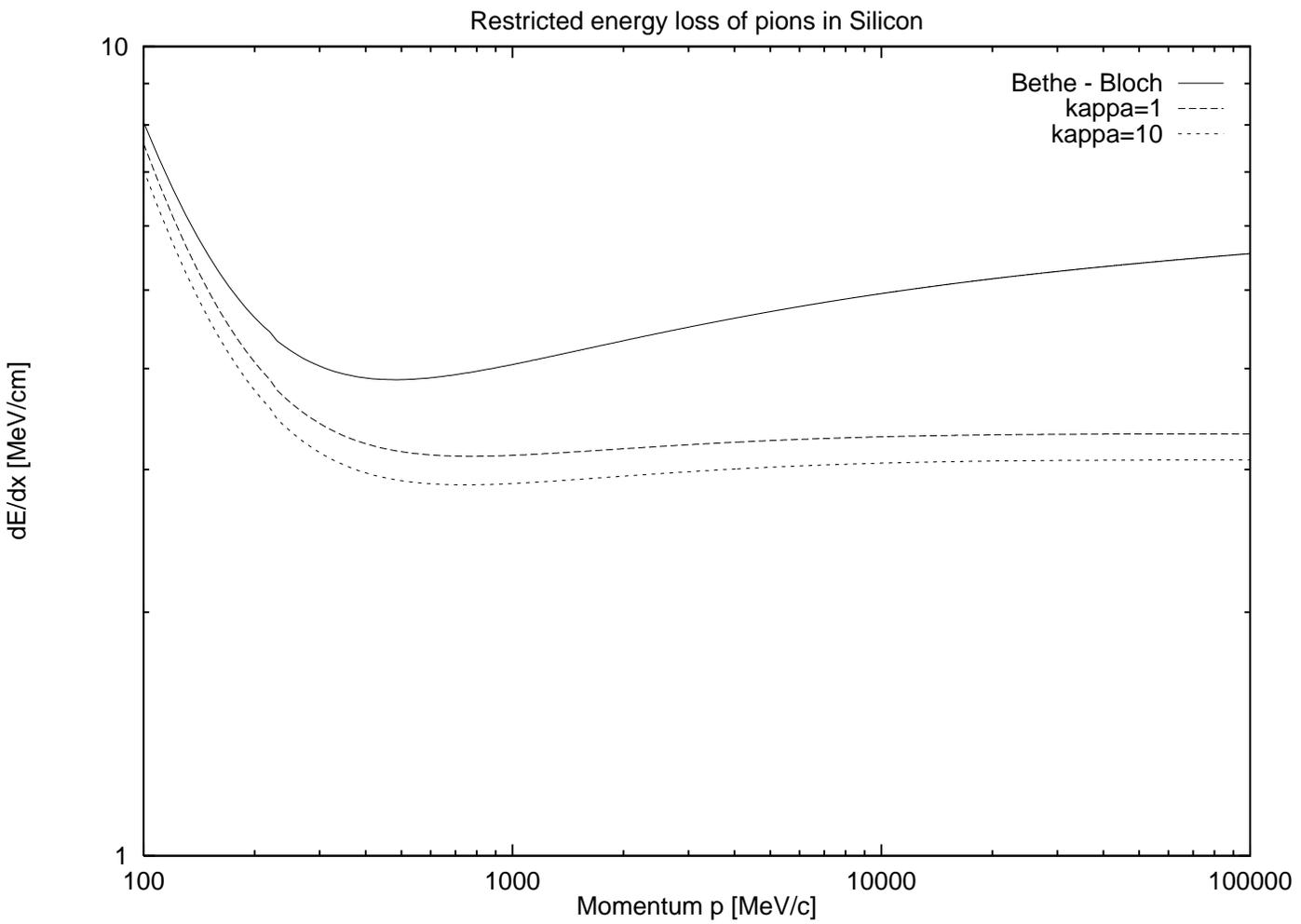


Abbildung 18: dE/dx von Pionen. Die durchgehende Linie zeigt dE/dx nach Gl. (72), die beiden anderen Kurven dE/dx Werte in $300\mu\text{m}$ Silizium und verschiedenen cut - offs.

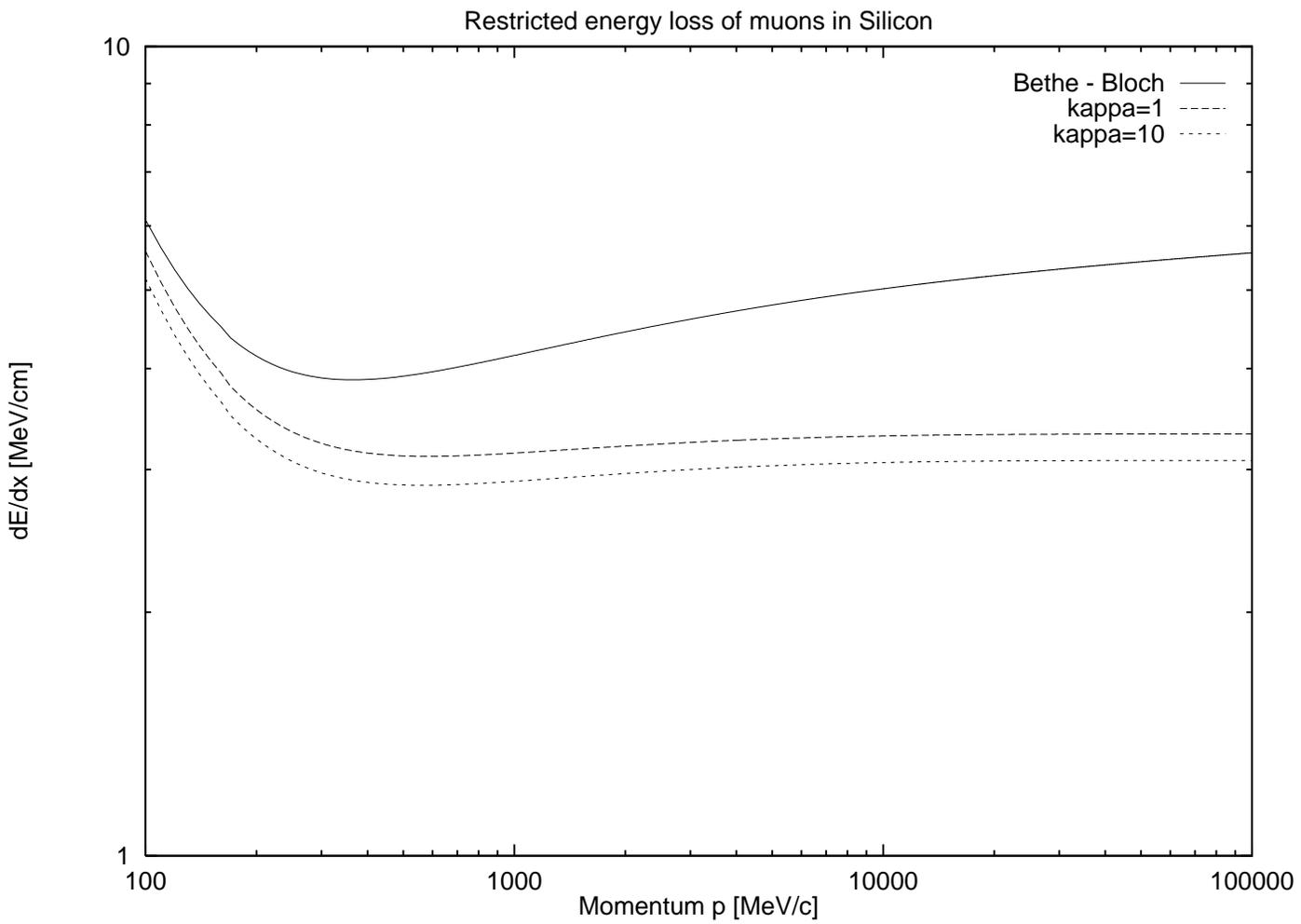


Abbildung 19: dE/dx von Myonen. Die durchgehende Linie zeigt dE/dx nach Gl. (72), die beiden anderen Kurven dE/dx Werte in $300\mu\text{m}$ Silizium und verschiedenen cut - offs.

Restricted Energyloss in 300 μ m Silizium			
p [MeV/c]	(dE/dx) _{p+} [MeV/cm]	(dE/dx) _{π+} [MeV/cm]	(dE/dx) _{μ+} [MeV/cm]
100	130.821	7.042	5.168
200	45.103	3.759	3.273
300	23.474	3.149	2.972
400	14.717	2.973	2.893
500	10.501	2.907	2.872
600	8.151	2.882	2.870
700	6.710	2.874	2.875
800	5.764	2.874	2.884
900	5.112	2.878	2.893
1000	4.645	2.884	2.902
2000	3.160	2.945	2.967
3000	2.937	2.982	3.000
4000	2.885	3.005	3.020
5000	2.876	3.020	3.033
6000	2.880	3.032	3.042
7000	2.889	3.040	3.048
8000	2.899	3.046	3.054
9000	2.909	3.051	3.057
10000	2.919	3.056	3.061
20000	2.984	3.074	3.074
30000	3.015	3.079	3.077
40000	3.034	3.082	3.079
50000	3.046	3.082	3.079
60000	3.054	3.082	3.079
70000	3.060	3.083	3.079
80000	3.064	3.083	3.079
90000	3.068	3.083	3.079
100000	3.071	3.083	3.079

Minimum beim Restricted Energyloss in 300 μ m Silizium			
	(dE/dx) _{min} [MeV/cm]	p _{min} [MeV/c]	$\beta\gamma$
p^+	2.876	5010	5.340
π^+	2.873	745	5.337
μ^+	2.869	563	5.326

Plateau beim Restricted Energyloss in 300 μ m Silizium		
	$(dE/dx)_{Pl.}$ [MeV/cm]	$p_{Pl.}$ [MeV/c]
p^+	3.085	460000
π^+	3.083	78000
μ^+	3.079	65400

Verhältnis beim Restricted Energyloss in 300 μ m Silizium	
	$(dE/dx)_{Pl.}/(dE/dx)_{min}$
p^+	1.073
π^+	1.073
μ^+	1.073

Cut - off Parameter beim Restricted Energyloss in 300 μ m Silizium		
	W_{cut} [MeV]	p_{cut} [MeV/c]
p^+	0.085	270
π^+	0.083	40
μ^+	0.082	30

1.6.3 Channeling

Eine wichtige Ausnahme der Anwendbarkeit der Bethe - Bloch Formel ist dann gegeben, wenn das Absorbermaterial eine räumliche Symmetrie aufweist (wie zum Beispiel in Kristallen). Dieser Effekt tritt auf, wenn das einfallende Teilchen unterhalb eines bestimmten Grenzwinkels in Bezug auf die Kristallsymmetrie auf das Absorbermaterial auftrifft. Bei seinem Durchgang durch die Kristallebenen erfährt es eine Reihe von korrelierten Streuungen mit kleinen Streuwinkeln, die es zwischen zwei Kristallebenen entlangführt. Eine schematische Abbildung ist in Abb.(20) zu sehen.

Der Effekt macht sich darin bemerkbar, daß das Teilchen auf weniger Elektronen trifft als in einem amorphen Material. Dadurch reduziert sich auch der Energieverlust erheblich. Daher ist es bei der Arbeit mit kristallinen Materialien notwendig, sich über die Orientierung des Kristalls im klaren zu sein, um Channelingeffekte zu vermeiden oder zu erhalten (je nach Wunsch). Im Normalfall ist der kritische Winkel für Channeling klein ($\sim 1^\circ$ bei $\beta \sim 0.1$) und nimmt mit zunehmender Energie ab. Der kritische Winkel kann durch folgende Formel abgeschätzt werden:

$$\Phi_c \simeq \frac{\sqrt{zZa_0Ad}}{1670\beta\sqrt{\gamma}}, \quad (118)$$

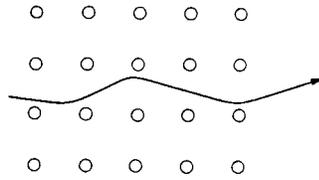


Abbildung 20: Schema eines „channeling particles“ in einem kristallinen Material. Das Teilchen erfährt eine Reihe von korrelierten Ablenkungen, die es in einem offenen Kanal im Gitter entlangführen.

wobei a_0 der Bohrsche Atomradius ist, und d der Abstand der Atome zueinander. Bei $\Phi > \Phi_c$ kommt es zu keinem Channeling und das Material kann als amorph angesehen werden. In der Elementarteilchenphysik ist Channeling kaum von Bedeutung. Da für den Bohrschen Radius $a_0 \simeq 10^{-8} \text{cm}$ und daher für den mittleren Abstand der Atome ebenfalls $d \simeq 10^{-8} \text{cm}$ gilt, muß nach obiger Formel β sehr klein werden, um einen vernünftigen Winkel zu erhalten. 300MeV/c Protonen, welche bereits als „low energy particles“ gelten, haben bereits ein $\beta \simeq 0.3$. Daher kann Channeling im großen und ganzen vernachlässigt werden.

Ein Beispiel, wo dieser Effekt gewünscht und auch angewendet, ist das NA48 Experiment am CERN. Hier wird ein Kristall verwendet, um einen hochenergetischen Protonenstrahl zu kollimieren.

2 Experimenteller Aufbau

2.1 Der CMS Detektor

CMS steht für **C**ompact **M**uon **S**olenoid und ist einer von zwei Detektoren des neuen Proton - Proton Beschleunigers LHC (**L**arge **H**adron **C**ollider). LHC soll LEP ab dem Jahr 2005 ersetzen und neue Erkenntnisse in der Elementarteilchenphysik liefern. Der Energiebereich von LHC soll sich bis 14TeV (LEP-2000: 200GeV) erstrecken. CMS versucht unter anderem Fragen auf folgende Antworten finden:

- Im Standardmodell wird das Higgs - Teilchen vorhergesagt, welches eine zentrale Rolle spielt, weil es den Teilchen Masse geben soll. Bisher konnte es noch nicht gefunden werden.
- Super Symmetries (SUSY), eine Erweiterung des Standardmodells, sagt ebenfalls neue Teilchen im Energiebereich $>1\text{TeV}$ voraus. CMS ist dazu ausgelegt, auch nach diesen Teilchen zu suchen.
- Dies bedeutet aber auch, ob man experimentelle Hinweise auf eine Theorie der Vereinigung der fundamentalen Wechselwirkungen (GUT, **G**rand **U**nified **T**heorie) findet.
- Außerdem soll mit LHC (im Betrieb als Schwerionenbeschleuniger) eine neue (bzw. sehr alte) Form von Materie erzeugt werden, ein Quark - Gluonen Plasma. Diese Form von Materie soll kurz nach dem Urknall existiert haben, als die Kernkräfte dominant waren.

Ein schematisches Bild vom Aufbau des CMS - Detektors ist in Abb.(21) gezeigt. Das Institut für Hochenergiephysik ist (unter anderem) am Bau des Inner Trackers des CMS Detektors beteiligt. Für diesen Teil des Detektors werden Silizium Streifendetektoren entwickelt, welche völlig neuen Ansprüchen gerecht werden müssen:

- Der Silizium Detektor befindet sich in einem Magnetfeld von 4T.
- Alle 25ns (LEP: $22\mu\text{s}$) kommt es zu einem „punch crossing“ mit mehr als 20 Proton - Proton Kollisionen im Detektor. Die dadurch entstehenden Ansprüche an die Elektronik sind enorm.
- Die Zahl der bei einer Kollision entstehenden Teilchen liegen um ein Vielfaches über jenen bei LEP. Dadurch muß im Verlauf des Betriebes von LHC und CMS mit enormen Strahlungsschäden an Elektronik und Detektor gerechnet werden. Die Elektronik und der Detektor müssen daher entsprechend konstruiert werden, um eine ausreichende Strahlungsfestigkeit zu besitzen.

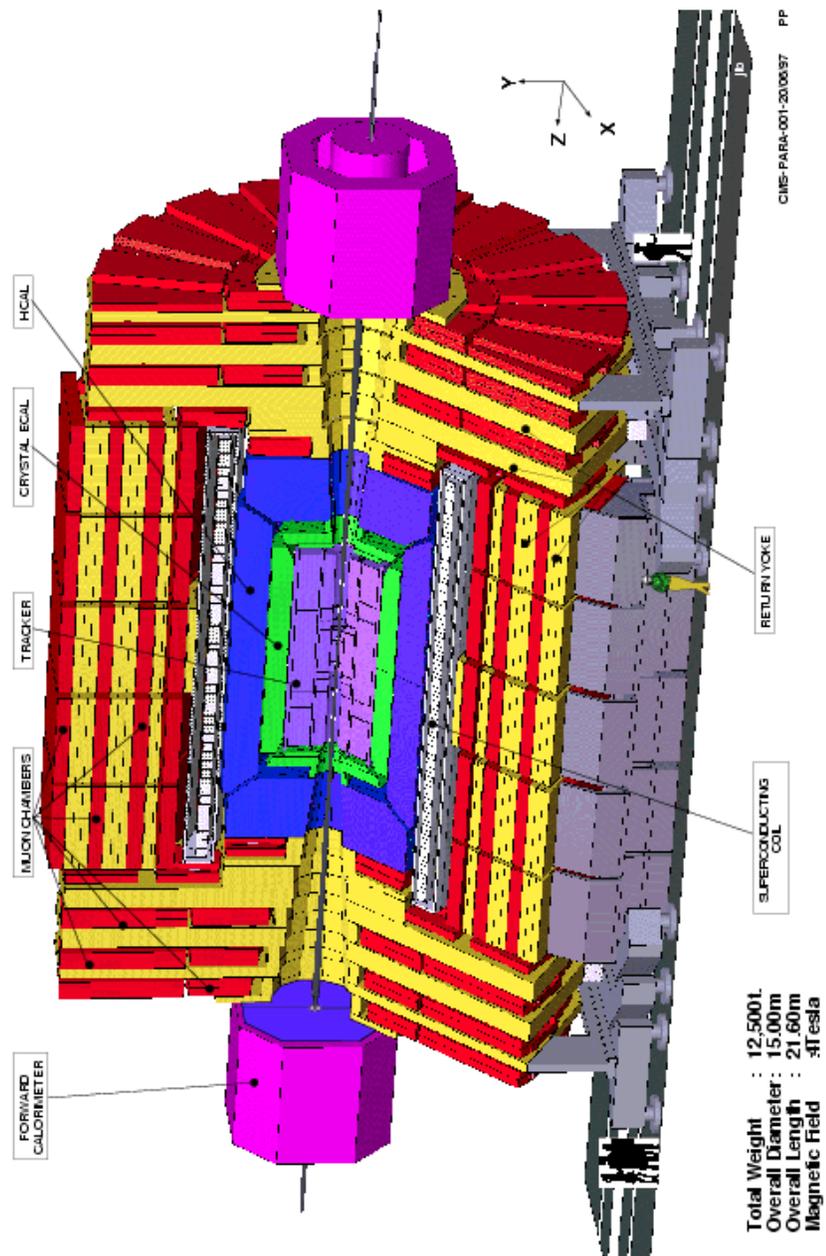


Abbildung 21: Der CMS Detektor.

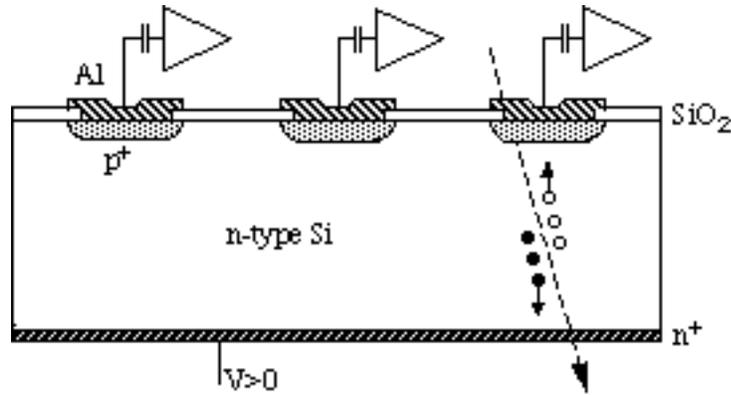


Abbildung 22: Schematischer Aufbau eines Silizium Streifendetektors.

- Wegen des hohen Magnetfeldes haben niederenergetische Teilchen (mit Impulsen von einigen $\sim 100 \text{ MeV}/c$) eine spiralförmige Bahn. Das heißt, sie treffen unter extremen Winkeln auf die Siliziumdetektoren auf und erzeugen ein entsprechendes Signal in diesen Detektoren.
- Wegen der Verwendung einer schnellen Ausleseelektronik und den Strahlungsschäden am Detektor rechnet man damit, ein Verhältnis Signal/Noise von nur 10 - 15 im Detektor zu erhalten. Bei den Silizium Streifendetektoren in DELPHI (LEP) liegt dieses Verhältnis bei 12 - 50 (hochenergetische Teilchen).

2.2 Aufbau eines Silizium Streifendetektors

In Abb.(22) ist ein Querschnitt durch einen Silizium Streifendetektor gezeigt. Das Prinzip der Funktionsweise ist dem einer Diode vergleichbar. In eine n - dotierte Siliziumscheibe (Standarddicke $300 \mu\text{m}$) werden Streifen mit p - Atomen dotiert. Auf den Streifen aufgetragen befindet sich eine Schicht Aluminium. Zum Schutz der p - und n - Schicht befindet sich auf der Oberseite eine Schicht SiO_2 . An der Unterseite des Detektors befindet sich eine Schicht mit stark n - dotiertem und fast leitendem Silizium. Durch Anlegen einer negativen Spannung an die Aluminiumstreifen und einer positiven Spannung an der Detektorunterseite („backplane“) bildet sich im Detektor (genauer: zwischen dem p-n Übergang) eine Verarmungszone (ladungsfrei Zone). Durch das Erhöhen der angelegten Spannung („depletion voltage“) kann diese Zone weiter ausgedehnt werden. Bei 100V „depletion voltage“ schließlich geht sie über die gesamte Detektordicke: Der Detektor ist „fully depleted“ (Verarmungszone völlig verarmt) und für einen rauscharmen Betrieb einsatzbereit. Fliegt nun ein Teilchen durch den Detektor durch, erzeugt es entlang seiner Spur Elektronen - Loch Paare. Die Löcher wandern im elektrischen Feld zu den Streifen, die Elektronen zur „backplane“ (Driftzeit für beide

$\sim 1\text{ns}$). Über eine AC - Kopplung (Kondensator) auf den Streifen kann das erzeugte Signal mit einem Auslesechip ausgelesen und weiter verarbeitet werden. Dies ist nur ein Beispiel für einen Silizium Streifendetektor, es gibt auch andere Typen mit DC - Kopplung.

2.3 PSI97 Test

2.3.1 Einleitung

Um das Verhalten von low - energy particles, welche bei CMS unter hohen Winkeln auf den Detektor treffen, abschätzen zu können, wurde im Herbst 1997 am PSI ein Test mit Pionen und Protonen mit Impulsen von $270\text{MeV}/c$, $310\text{MeV}/c$ und $405\text{MeV}/c$ durchgeführt. Von besonderem Interesse war der Anstieg der Clusterbreite, des Signals und des Verhältnisses aus Teilchensignal zu Untergrund im Detektor (kurz „Signal/Noise“ oder „S/N“ Verhältnisse) mit steigenden Winkeln. Der verwendete Detektor war ein Prototyp eines CMS Silizium Streifendetektors. Zur Auslese der Daten wurde ein VA2 Chip verwendet. Da dieser Chip eine Integrationszeit von $2\mu\text{s}$ hat, bei LHC aber Chips mit 25ns eingesetzt werden, liegen die Signal/Noise Werte bei PSI97 über jenen, die man sich bei LHC erwartet (~ 10 für Pionen bei 0°). Daher wurde mit den vorhandenen Daten eine High - Noise Simulation durchgeführt, welche das Verhalten von low energy particles bei LHC simulieren soll.

2.3.2 Experimenteller Aufbau

Die Messungen wurden an der πM1 beam line am PSI durchgeführt. Der Strahl war ein Gemisch aus Protonen und Pionen mit den Impulsen 270MeV , 310MeV , 405MeV . Der verwendete Testdetektor (Version Nr. 1751) hatte 128 Streifen, $50\mu\text{m}$ Streifenabstand („pitch“) und $300\mu\text{m}$ Dicke. Die 128 Streifen wurden an einen rauscharmen VA2 („low noise“) Auslesechip mit $2\mu\text{s}$ Integrationszeit („shaping time“) angeschlossen („gebondet“). Der Testdetektor wurde bei 100V Verarmungsspannung („depletion voltage“) betrieben. Der Testdetektor war auf einem Drehtisch montiert, um unterschiedliche Winkel, unter denen Teilchen auf den Detektor auftreffen, untersuchen zu können.

Weiters waren ein Referenzteleskop und als Trigger ein Szintillator hinter dem Testdetektor installiert. Ein Überblick über den Aufbau und die Winkel sind in den Abb.(23 und 24) zu sehen.

2.4 APV6 - Silizium System Test

Erstmals wurde vom Institut für Hochenergiephysik ein Silizium Streifendetektor mit einer schnellen Ausleseelektronik (APV6 Chip) getestet, wie sie bei CMS zum Einsatz kommen soll.

Test Setup

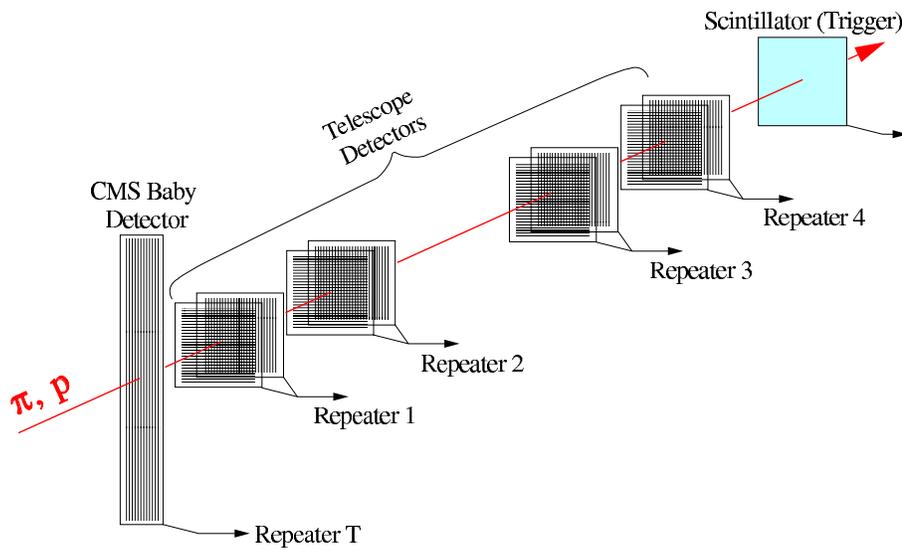


Abbildung 23: PSI97 Testbeam Setup.

Overview over Angles

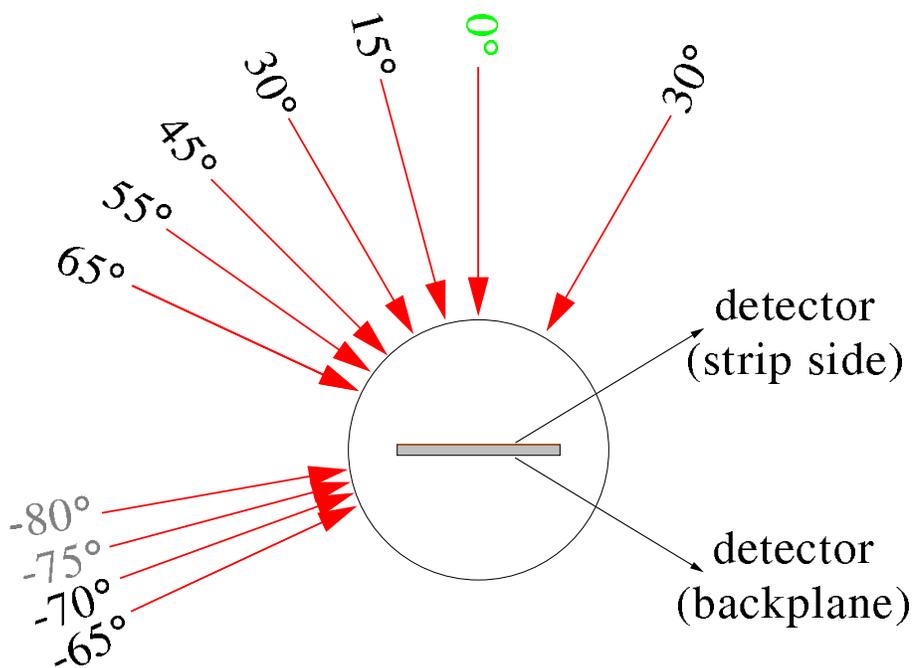


Abbildung 24: Überblick über die gemessenen Winkel.

2.4.1 Experimenteller Aufbau

Verwendet wurde ein Hamamatsu multiregion detector #12 mit 6cm Länge und $300\mu\text{m}$ Dicke. Er bestand aus 12 Zonen mit unterschiedlichem Streifenabstand („pitch“) und unterschiedlicher Streifenbreite. Eine Zone umfaßte 32 Streifen.

Hamamatsu Multiregion Detector			
Abstand [μm] / Breite [μm]			
zone 0 60 / 25	zone 1 80 / 40	zone 2 240 / 70	zone 3 120 / 50
zone 4 60 / 20	zone 5 80 / 25	zone 6 240 / 50	zone 7 120 / 35
zone 8 60 / 15	zone 9 80 / 15	zone 10 240 / 30	zone 11 120 / 20

Je vier Zonen (0-3, 4-7 und 8-11) wurden an einen APV6 Auslesechip gebondet, es wurden also insgesamt 3 APV6 mit je 128 Auslestreifen verwendet. Der gesamte Detektor mit der Ausleseelektronik befand sich in einer Kühlbox. Im Experiment wurden auf dem Detektor 14°C , auf einem APV6 20°C gemessen. Hinter der Kühlbox stand ein Szintillator mit zwei Photomultipliern, welcher als Teilchentrigger verwendet wurde. Der genaue Aufbau ist schematisch in Abb.(25) zu sehen. Die Daten wurden mit einem PC-DAQ System aufgenommen. Gemessen wurde ein Gemisch aus Myonen und Pionen mit einem Impuls von $100\text{GeV}/c$. Eine Kalibration des APV6 mit einer externen 8.2pF Kapazität lieferte

$$346 \frac{e^-}{ADC} \pm 10\%.$$

TESTBEAM SETUP

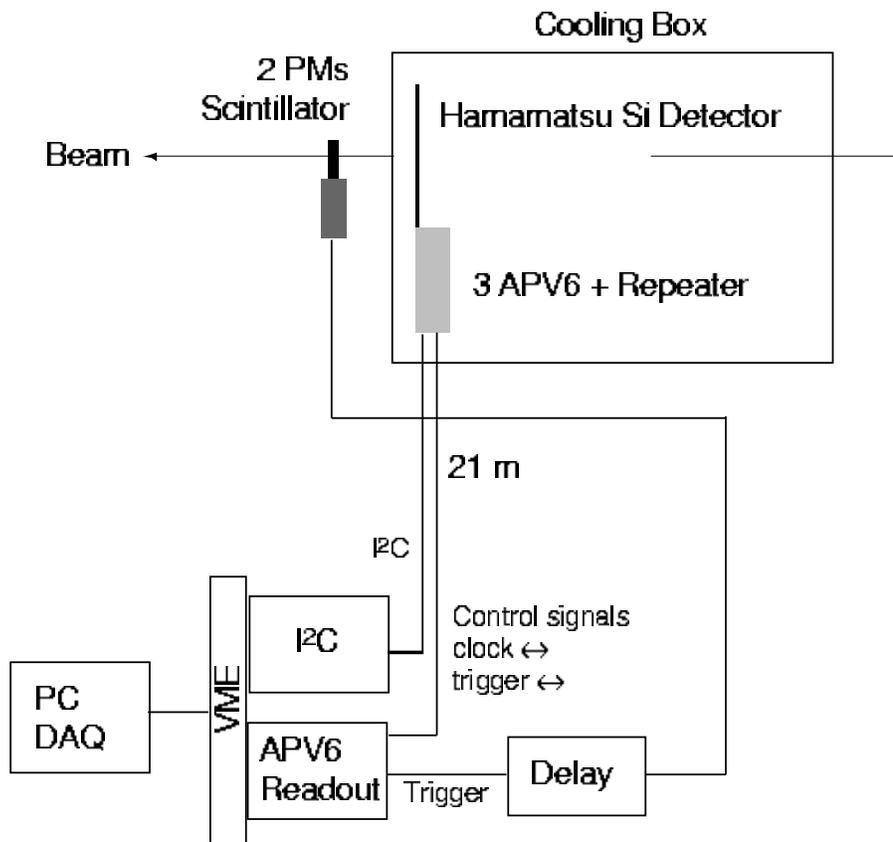


Abbildung 25: APV6 Testbeam Setup.

3 Datenauswertung von Siliziumdetektoren

3.1 PSI97 Test

3.1.1 Datenanalyse

Zur Datenanalyse wurde das Programm „TELANA“¹⁴ verwendet. Es korrigiert auf Untergrund („pedestal“, „noise“) und Schwingungen des Signals im Detektor („common mode“ Schwingungen) und führt eine Clustersuche durch.

Bei den drei verfügbaren Energien wurden Daten unter verschiedenen Auftreffwinkeln der Teilchen auf den Detektor (0° - 70°) aufgenommen. 0° bedeutet senkrecht auf die Detektorfläche. Bei einigen Winkeln wurde der Strahl auf die Detektor Rückseite geschossen, diese Winkel sind durch ein vorangehendes „-“ gekennzeichnet.

Strahl Impuls [MeV/c]	Winkel [°]
270	0, 15, 30, 45, 55, 65, -65, -70
310	0, 15, 30, 45, 55, 65, -65, -70
405	0, 15, 30, 45, 55, -65, -70

Für die Cluster Suche (- ein Cluster besteht aus einem oder mehreren Streifen, welche beim Durchgang eines Teilchens durch den Detektor ansprechen -) wurden drei verschiedene „Thresholds“ (Schwellwerte) verwendet:

- Das Verhältnis von Signal/Noise (S/N) muß bei einem Streifen in einem Cluster größer oder gleich einem Threshold thr_{center} sein,
- das Verhältnis von S/N bei den daneben liegenden Streifen in einem Cluster muß größer oder gleich einem Threshold $thr_{neighbour}$ sein,
- die Summe aller S/N- Werte in einem Cluster muß größer oder gleich einem Threshold $thr_{cluster}$ sein.

Nachdem mit verschiedenen Thresholds experimentiert wurde, wurden schließlich folgende Werte für die gesamte Analyse verwendet:

- $thr_{center} = 6 \sigma_{noise}$,
- $thr_{neighbour} = 3 \sigma_{noise}$,
- $thr_{cluster} = 10 \sigma_{noise}$.

¹⁴Dieses Programm wurde ursprünglich für die Datenanalyse beim Experiment DELPHI entwickelt.

Für jedes Ereignis (Teilchen) wurden die Streifen einzeln auf ihr S/N Verhältnis überprüft. Erfüllte ein Streifen den Threshold thr_{center} , so fügt das Programm von diesem Streifen weg („center strip“) an beiden Seiten S/N - Werte von Nachbarstreifen hinzu, für welche das S/N - Verhältnis über $thr_{neighbour}$ liegt. Am Ende wird dieser Cluster nur dann akzeptiert, wenn das gesamte S/N - Verhältnis in diesem Cluster über $thr_{cluster}$ liegt.

Bei hohen Winkeln wurde bemerkt, daß sich Cluster aufspalten können oder Teile eines Clusters nicht erkannt werden, da zwischen dem „center strip“ und diesem Teil des Clusters ein Streifen liegt, dessen S/N unter dem von $thr_{neighbour}$ liegt.

Um dies zu verhindern, wurde der Algorithmus zur Clustersuche neu definiert:

Wenn während der Clustersuche ein Streifen unter das S/N Verhältnis $thr_{neighbour}$ fällt, wird die Suche nicht gestoppt, sondern es wird noch das S/N Verhältnis des danach folgenden Streifens untersucht. Liegt das S/N Verhältnis von diesem Streifen über jenem von $thr_{neighbour}$, so werden die S/N Werte von diesem und dem vorangegangenen „schlechten“ Streifen zum Cluster S/N addiert, und die Suche geht weiter („hole fixing“). Es wird ein „Loch“ („hole“) auf beiden Seiten des center strips erlaubt.

Mit Hilfe der Referenzdetektoren wurden noch weitere Beschränkungen („cuts“) auf die Ereignisse („events“) angewendet, um nur „echte“ Teilchenspuren zu selektieren:

- In jedem Teleskopdetektor muß ein Ereignis genau einen Cluster haben.
- Da der Testdetektor in y - Richtung größer ist als die Teleskopdetektoren, werden alle Teilchen, welche durch den ersten Teleskopdetektor gehen, auch im Testdetektor gesehen. Daher wurden in y - Richtung keine position - cuts gemacht.
- Anders in der x - Richtung, in der der Testdetektor halb so groß ist wie die Teleskopdetektoren. Daher macht es keinen Sinn, alle Teilchen, welche man im ersten Teleskopdetektor gesehen hat, auch mit dem Testdetektor zu analysieren. Um also die x - Position eines Teilchens auf die Fläche des Testdetektors zu beschränken, wurde verlangt, daß mindestens 50% aller Ereignisse, welche an einer bestimmten x - Position im ersten Teleskopdetektor gesehen wurden, auch im Testdetektor gesehen worden sind (siehe Abb.(26)).
- Um zwischen Protonen und Pionen unterscheiden zu können, wurde das Signal im ersten Teleskopdetektor verwendet. Wenn das Signal innerhalb eines Intervalles

$$[\pi_{lower}, \pi_{upper}]$$

liegt, wird das Teilchen als Pion angesehen, wenn das Signal innerhalb eines Intervalles

$$[p_{lower}, p_{upper}]$$

liegt, wird es als Proton betrachtet. Man kann das Signal von Protonen und Pionen bei allen drei Energien klar unterscheiden.

Ein Beispiel, welches Signal Protonen und Pionen im ersten Teleskopdetektor erzeugen, ist in Abb.(27) gezeigt. Da Protonen und Pionen ein so unterschiedliches Signal bei gleichem Impuls liefern, kann diese Methode auch zur Teilchenidentifizierung verwendet werden („dE/dx - Methode“).

3.1.2 Ergebnisse

Bei kleinen Winkeln war das Signal der Protonen so groß, daß es bei der Elektronik zu Sättigungseffekten kam. Erst bei höheren Winkeln, wenn sich das Signal über mehrere Streifen verteilt, kann das Signal vollständig von der Elektronik aufgenommen werden. Daher sind die ADC Werte für Protonen im Bereich von $[0^\circ, 30^\circ]$ kleiner als in Wirklichkeit. Ein Beispiel, wie sich dieser Effekt bemerkbar macht, ist in den Abbildungen (28) und (29) zu sehen:

- In Abb.(28) sind die Signal und Signal/Noise Histogramme bei einem Impuls von $310\text{MeV}/c$ und 0° zu sehen. Während die Pionen (linker „Peak“) einer Landauverteilung folgen, ist rechts vom Maximum für die Protonen (rechter „Peak“) eine Art Plateau zu sehen. Dieses Plateau hat keine „physikalische“ Bedeutung, sondern rührt daher, daß die Protonen im Detektor ein so großes Signal erzeugen und die Elektronik sättigt.
- In Abb.(29) sind die Signal und Signal/Noise Histogramme bei einem Impuls von $310\text{MeV}/c$ und 70° zu sehen. Sowohl für Pionen (links) als auch für Protonen (rechts) erkennt man die klare Unterscheidung der Teilchen durch ihre Signalwerte. In der Verteilung der Protonen fehlt nun das „Plateau“, da sich die erzeugte Ladung wegen dem hohen Durchgangswinkel der Teilchen durch den Detektor auf mehrere Streifen aufteilt und die Elektronik nicht sättigt. Man kann auch erkennen, daß die Verteilung der Pionen landauförmig ist, während jene der Protonen gaußförmig ist. Damit verbunden ist die Tatsache, daß bei den Protonen die Geschwindigkeit der δ - Elektronen noch klein ist. Bei gleichem Impuls ist die Geschwindigkeit der Pionen groß genug, um hochenergetische δ - Elektronen im Detektor zu erzeugen, welche den langsam abfallenden Schwanz in der Landauverteilung bilden. Außerdem können einige dieser δ - Elektronen aus dem Detektor entweichen, was zur Folge hat, daß der Energieverlust des Teilchens nicht mehr der im Detektor gemessenen Energie entspricht.

Cut on Testdetector Position

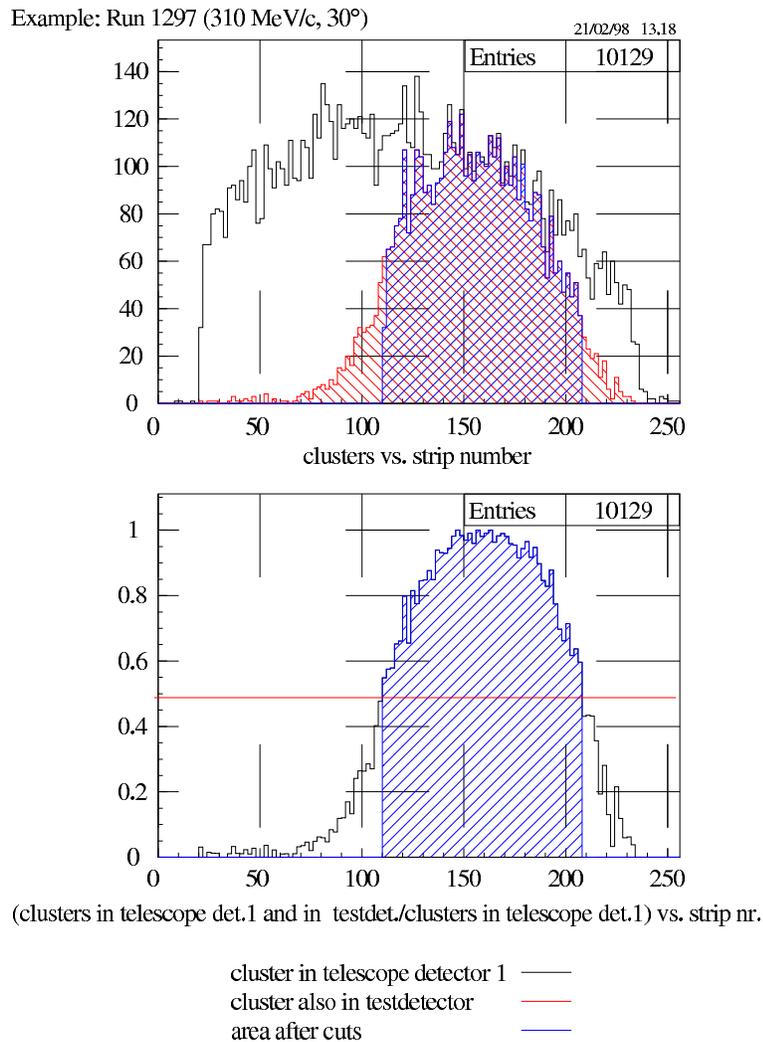


Abbildung 26: Cut in x - Richtung. Die Hälfte der Ereignisse, welche im Teleskopdetektor 1 zu sehen sind, müssen auch im Testdetektor gesehen worden sein.

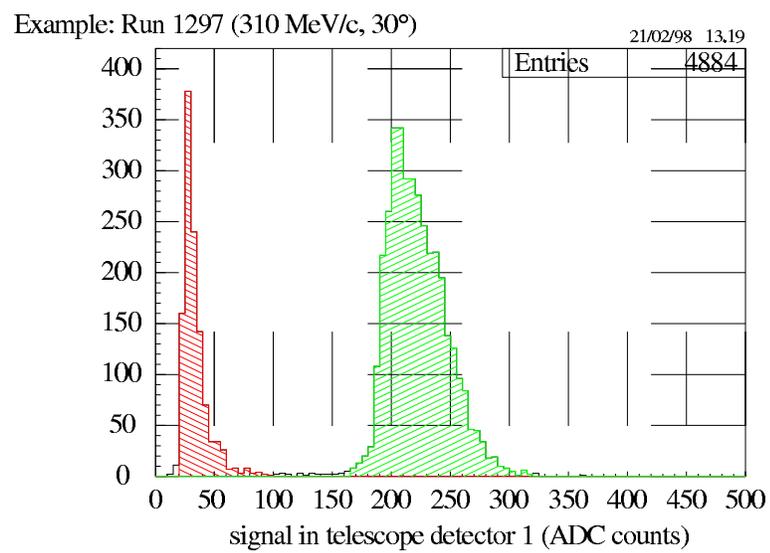


Abbildung 27: Das Signal von Protonen und Pionen im ersten Teleskopdetektor kann klar unterschieden werden.

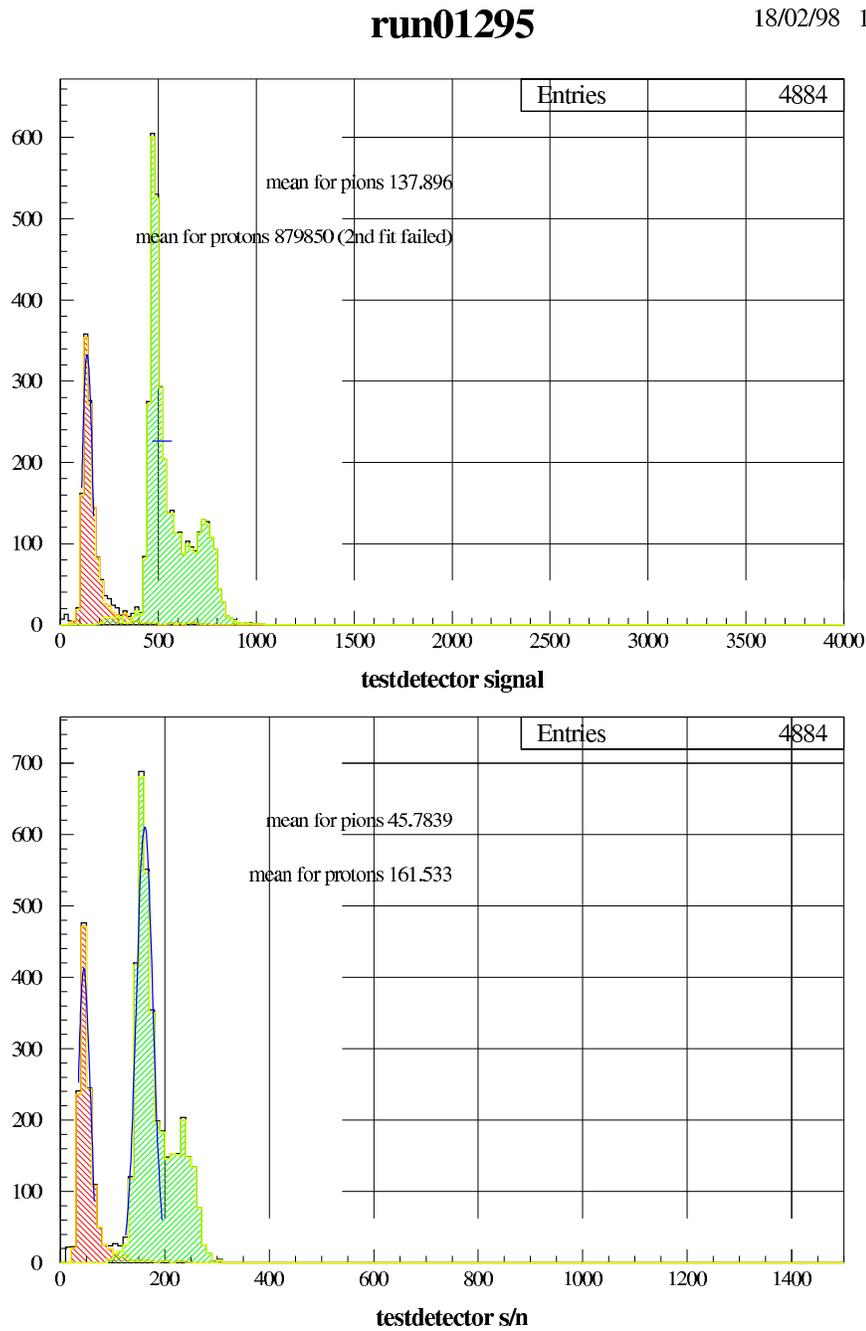


Abbildung 28: Signal und Signal/Noise im Testdetektor bei 310MeV/c und 0°.

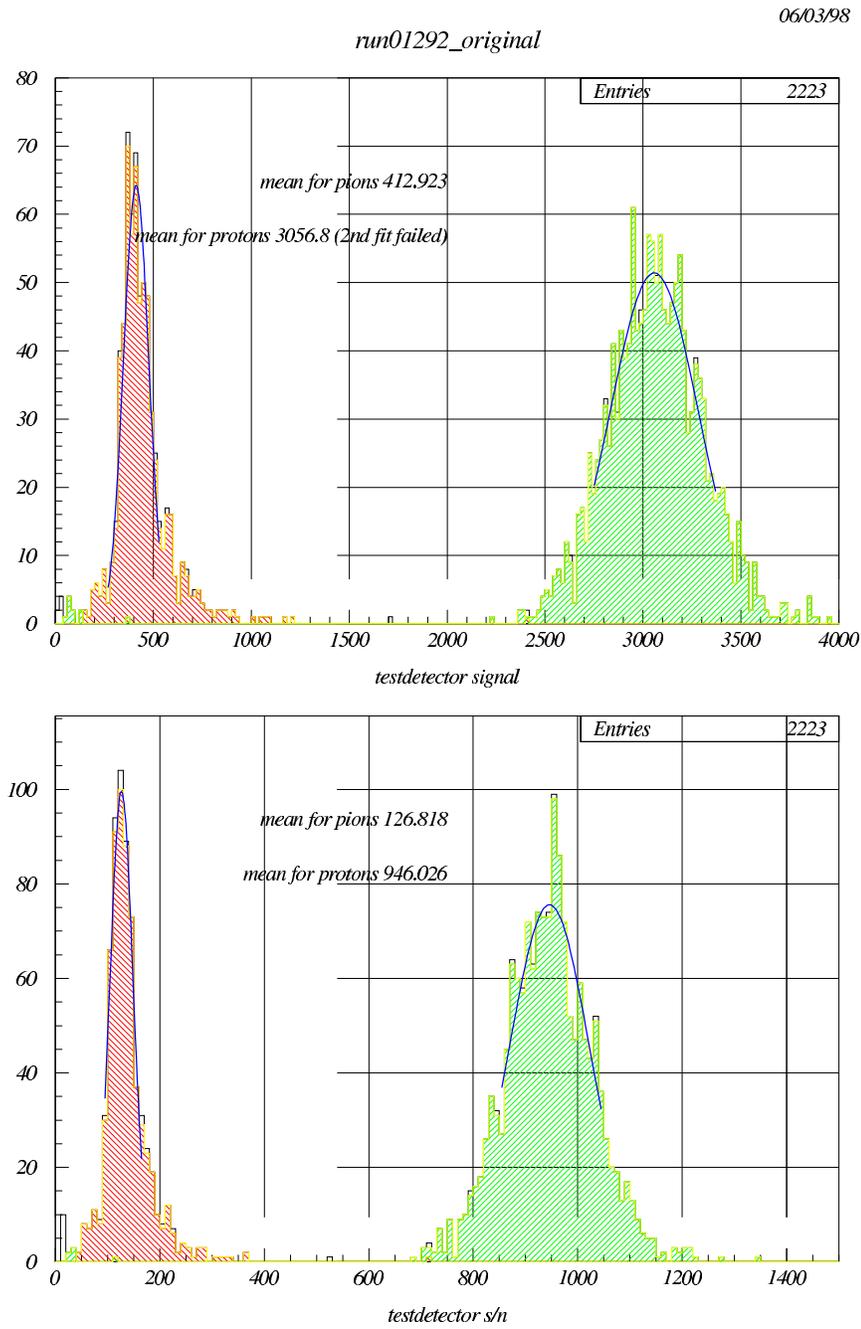


Abbildung 29: Signal und Signal/Noise im Testdetektor bei 310MeV/c und 70°.

Ein Beispiel für die Winkelabhängigkeit des Signals von Protonen und Pionen bei 270MeV/c ist in der Abbildung (30) gezeigt. Die Kurven bei den beiden anderen Impulsen (310MeV/c und 405MeV/c) sehen ähnlich aus. Die eingezeichneten Linien sind gefittete Kurven. Aufgrund von geometrischen Überlegungen steigt das Signal wie

$$\frac{1}{\cos(\phi)}$$

an:

- Da der Detektor um den Winkel ϕ gedreht ist, ist der Weg des Teilchens durch den Detektor nun

$$x = \frac{\Delta x}{\cos(\phi)}.$$

Δx ist die Dicke des Detektors. Mit dem längeren Weg gibt das Teilchen aber auch mehr Energie ab, denn

$$\Delta E = \frac{dE}{dx} \cdot x \propto \frac{1}{\cos(\phi)},$$

wenn man annimmt, daß sich nur der Winkel ändert und dE/dx und Δx konstant bleiben.

Ein Beispiel für die Winkelabhängigkeit der Clusterbreite von Protonen und Pionen bei 270MeV/c ist in der Abbildung (31) gezeigt. Wiederum aus geometrischen Überlegungen ergibt sich, daß sich die Clusterbreite wie

$$\text{Clusterbreite} = \sqrt{\left(\frac{\text{Detektordicke}}{\text{Streifenabstand}} \cdot \tan(\phi)\right)^2 + c^2}.$$

verhält. Die Konstante c ist eine Anpassungsgröße („Fitparameter“) und entspricht ungefähr der Clusterbreite bei 0° . Für Protonen steigt die Clusterbreite bis auf 17 Streifen an, was im ersten Moment überraschend scheint, wenn man aber die Geometrie betrachtet, plausibel ist. Überraschend dagegen ist, daß man bei 0° bei den Protonen eine mittlere Clusterbreite von etwa vier Streifen hat. Eine mögliche Erklärung könnte darin liegen, daß aufgrund der niedrigeren Geschwindigkeit der Protonen die „hochenergetischen“ δ -Elektronen noch unter relativ hohen Winkeln zur Flugrichtung der Protonen wegfliegen und daher eine relativ große Ladungswolke im Detektor erzeugen. Eine genauere Untersuchung ist noch notwendig.

Die Winkelabhängigkeit des Signals der Pionen bei den drei gemessenen Energien ist in Abb.(32) gezeigt. Bei allen drei Energien verhält sich das Signal wie man es von den geometrischen Überlegungen her erwartet. Man sieht auch, daß bei allen drei Energien die gemessenen Signalwerte eng zusammen liegen. Das heißt, daß sich die im Detektor durch das Teilchen abgegebene Energie bei den drei Pionenimpulsen nicht sehr stark ändert. Das wiederum bedeutet, daß man sich

Signal vs. Angle@ 270 MeV/c

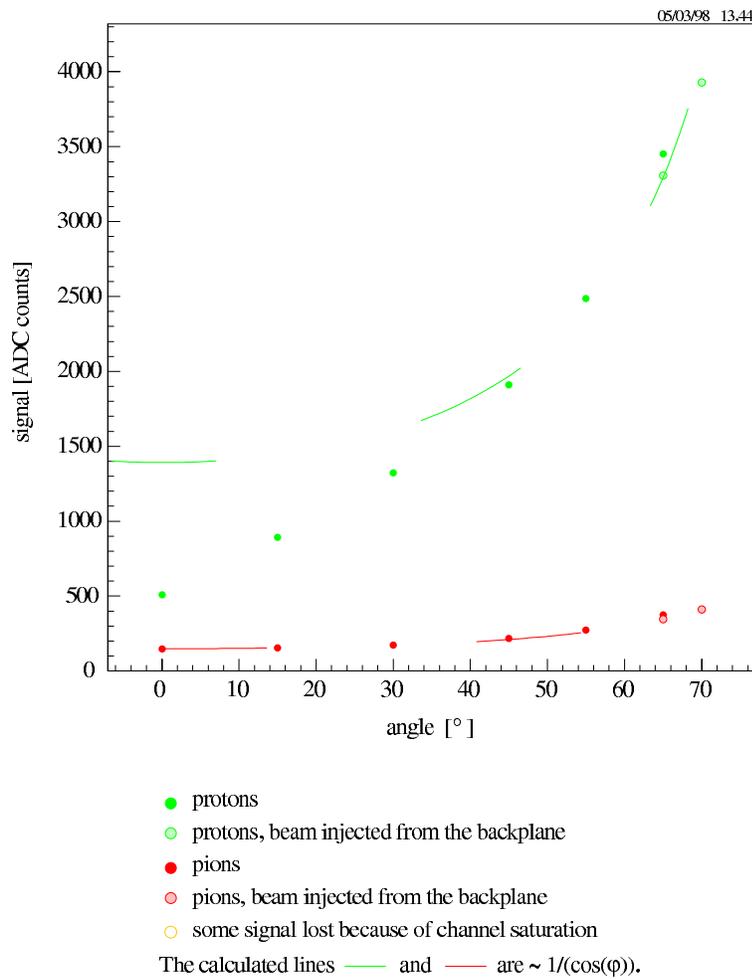


Abbildung 30: Winkelabhängigkeit des Signals bei 270MeV/c Beam Momentum. Man sieht das Sättigungsverhalten für Protonen bei kleinen Winkeln.

Clusterwidth vs. Angle@ 270 MeV/c

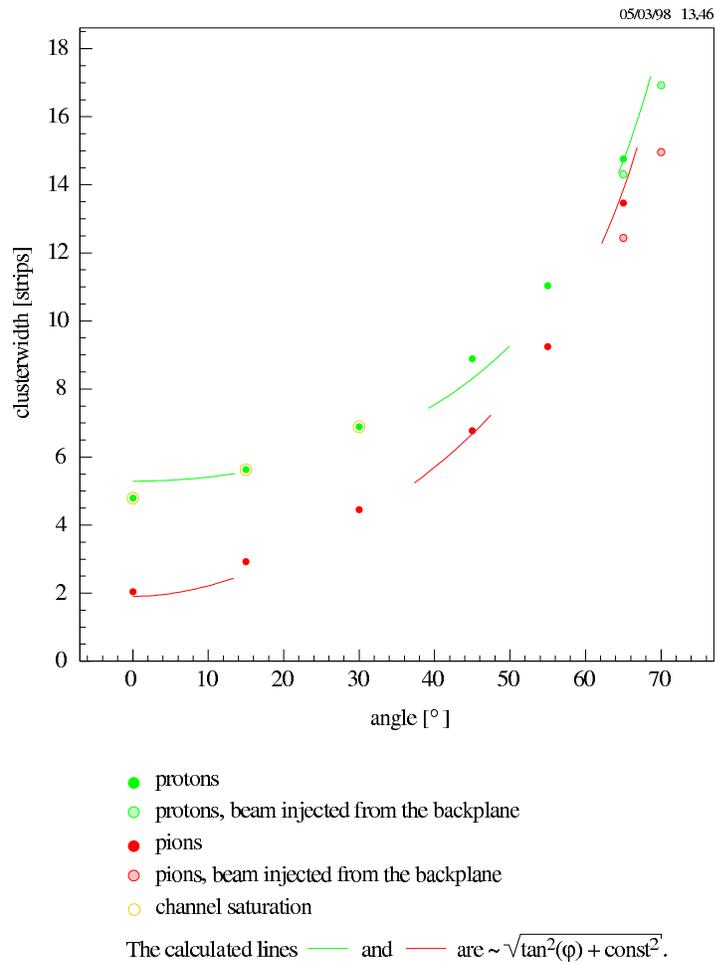


Abbildung 31: Winkelabhängigkeit des Clusterbreite bei 270MeV/c Beam Momentum.

Signal vs. Angle – Pions

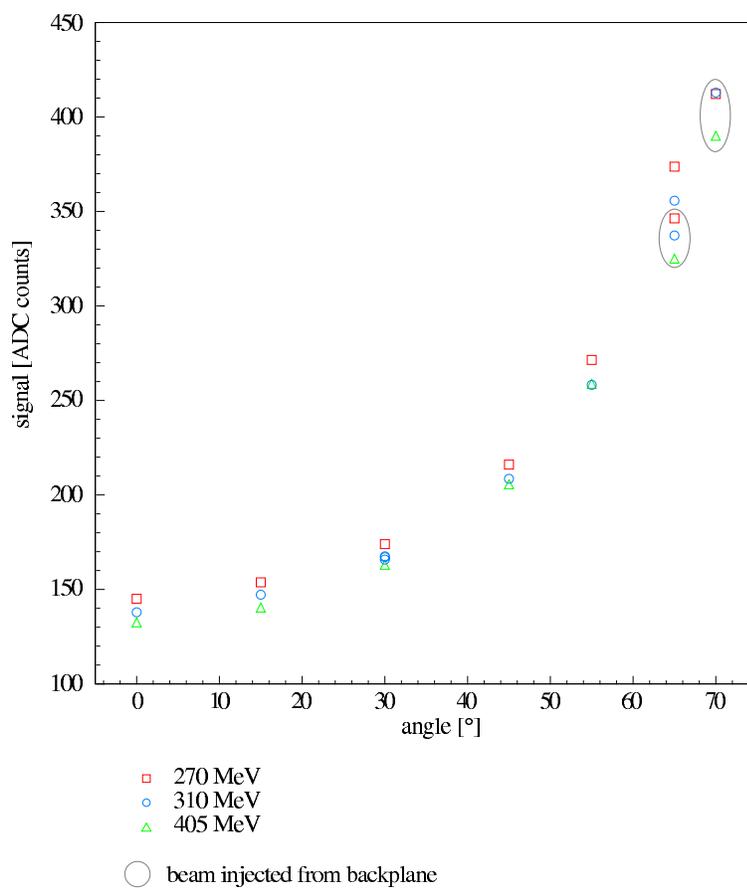


Abbildung 32: Winkelabhängigkeit des Signals der Pionen bei den drei gemessenen Energien.

Signal vs. Angle – Protons

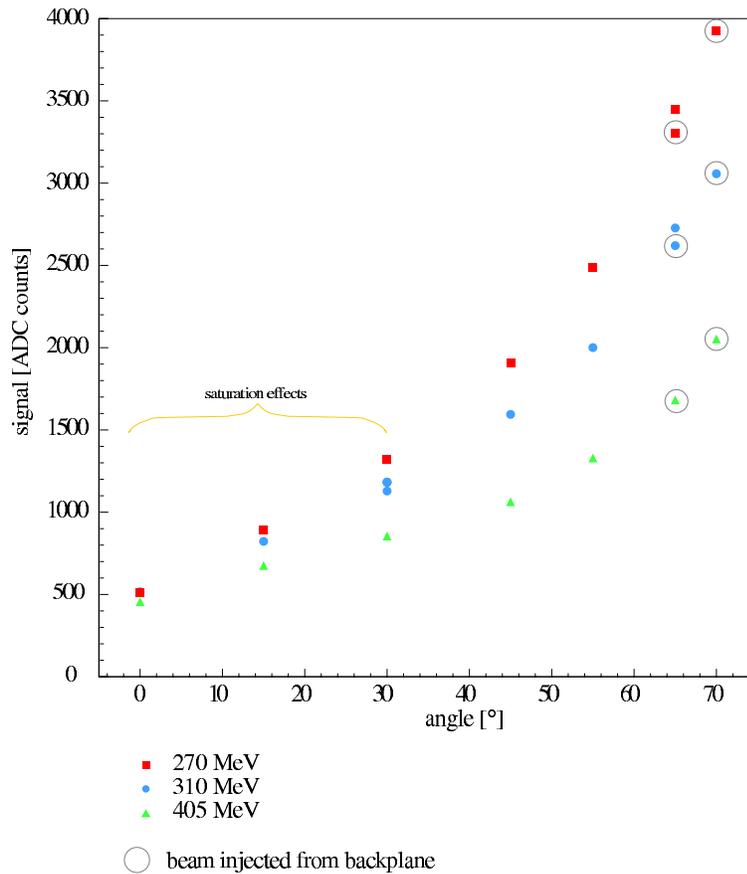


Abbildung 33: Winkelabhängigkeit des Signals der Protonen bei den drei gemessenen Energien.

für die Pionen bei diesen Impulsen in der Nähe des Energieverlustminimums befindet.

Die Winkelabhängigkeit des Signals der Protonen bei den drei gemessenen Energien ist in Abb.(33) gezeigt. Die Signalwerte bis zu Winkeln von 30° sind wegen der saturierten Elektronik zu gering. Die übrigen Punkte liegen wieder auf einer $\sim \frac{1}{\cos(\phi)}$ Kurve (hier nicht eingezeichnet), und entsprechen damit (innerhalb der Meßgenauigkeit) den Erwartungen aus den geometrischen Überlegungen. Man kann sehen, daß die ADC - Werte der Protonen mit dem höheren Impuls deutlich unter jenen mit dem niedrigeren Impuls liegen. Das heißt, daß das Signal der Protonen noch sehr von ihrer kinetischen Energie abhängig ist und man noch weit vom Energieverlustminimum entfernt ist.

Die Clusterbreite (Anzahl der bei einem Ereignis angesprochenen Streifen im Detektor) in Abhängigkeit zum Winkel ist in Abb.(34) gezeigt. Zu sehen sind die Meßwerte für Pionen und Protonen bei den drei gemessenen Energien in Abhängigkeit zum Winkel. Auch hier entsprechen die Meßergebnisse den aus geometrischen Überlegungen erhaltenen Erwartungen.

Clusterwidth vs. Angle

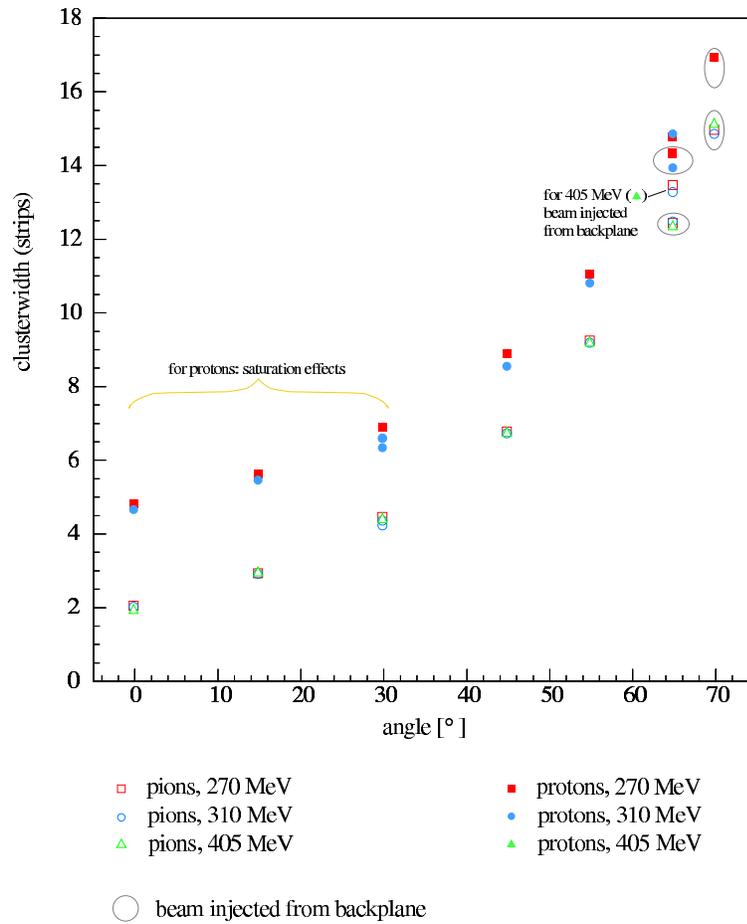


Abbildung 34: Clusterbreite von Pionen und Protonen bei verschiedenen Energien in Abhängigkeit zum Winkel.

3.1.3 High - Noise Simulation

Im Testbeam am PSI waren die Bedingungen für ein gutes S/N Verhältnis gegeben. Die „low - noise“ Architektur des VA2 Auslesechips ($\sim 2\mu\text{s}$ Integrationszeit) und keine Strahlungsschäden am Detektor machten es möglich, je nach Teilchenimpuls und Winkel ein S/N zu messen für

- Pionen zwischen 46 und 134 und
- Protonen zwischen 152 und 1255.

In LHC erwartet man sich S/N Werte von ungefähr 10 für Pionen („worst case scenario“), verursacht durch die wesentlich schnellere Ausleseelektronik ($\sim 25\text{ns}$) und den hohen Strahlungsschäden am Detektor, welche durch die hohe Teilchendichte bei LHC entstehen. Um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie High - Noise Daten zu behandeln sind, wurde mit einem Teil der vorhandenen Daten eine High - Noise Simulation gemacht. Konkret wurde der Noise dadurch erhöht, in dem man auf die vorhandenen Rohdaten einen Gaussian Noise aufschlug, bevor mit der Datenauswertung begonnen wurde. Zur Kalibrierung des hinzuzufügenden Noise wurden die Daten von Run01295 (310MeV und 0°) verwendet. Bei den vorhandenen Daten im Teststrahl hatte man ein Rauschen („Noise“) von ungefähr 3 ADC Kanäle, was man in Abb.(35) durch Bilden von

$$noise = \frac{signal}{signal/noise} \quad (119)$$

sehen kann.

Bei den vorhandenen Daten liegt das Signal der Pionen (310MeV und 0°) bei ungefähr 150 ADC Kanäle.

Mit dem vorhandenen Noise von drei ergibt sich für die Pionen somit ein Verhältnis Signal/Noise von 50 (siehe Abb.(36)).

Um für Pionen also ein Signal/Noise von 10 zu erhalten, muß man den Noise von 3 ADC Kanäle auf ungefähr 15 ADC Kanäle erhöhen. Dazu mußten einige Dateien von „Telana“, welche zum Prozessieren der Rohdaten verwendet werden, abgeändert werden¹⁵.

Der Noise stieg dadurch von 3 ADC Kanäle auf tatsächlich 15 ADC Kanäle bei den simulierten Daten, wie in Abb.(37) zu sehen ist.

Das Ergebnis ist in Abb.(38) zu sehen. Für Pionen erhält man ein S/N Verhältnis von knapp unter 10, für Protonen ein S/N von etwas über 30. Durch den höheren Noise verliert man ungefähr 15% an Ereignissen (hauptsächlich Pionen), welche durch den höheren Noise unter die entsprechenden Thresholds gefallen sind. Die Statistik reicht jedoch noch aus, um Protonen und Pionen genügend unterscheiden zu können.

¹⁵Da es keinen Sinn macht, an dieser Stelle langwierige Programmlistings anzugeben, wurden alle Details der geänderten Programmstellen in einem eigenen Protokoll zusammengestellt.

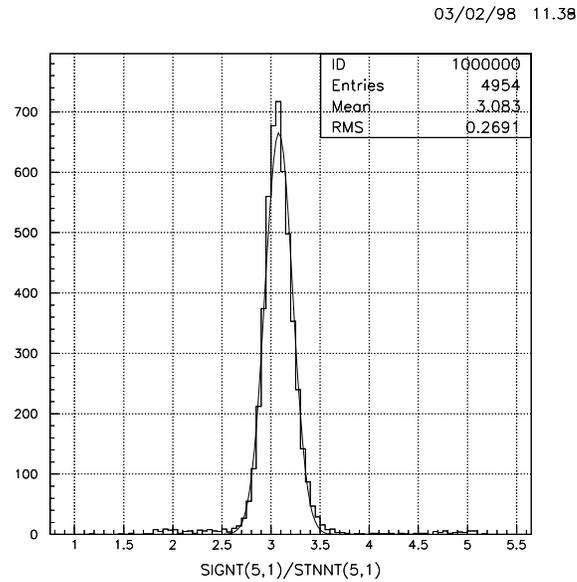


Abbildung 35: Rauschen („noise“) bei den originalen Daten. Der Noise liegt bei ungefähr 3 ADC Kanälen.

Testbeam Data:

Example: Run 1295 (310 MeV/c, 0°)

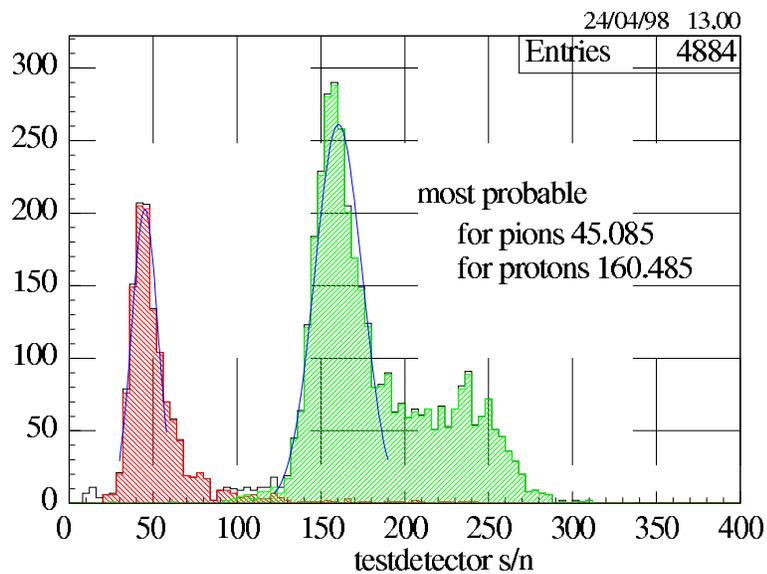


Abbildung 36: Signal/Noise von run01295 (310MeV bei 0°). Für die Pionen liegt das Verhältnis von S/N bei 45, bei CMS erwartet man sich ein S/N von 10.

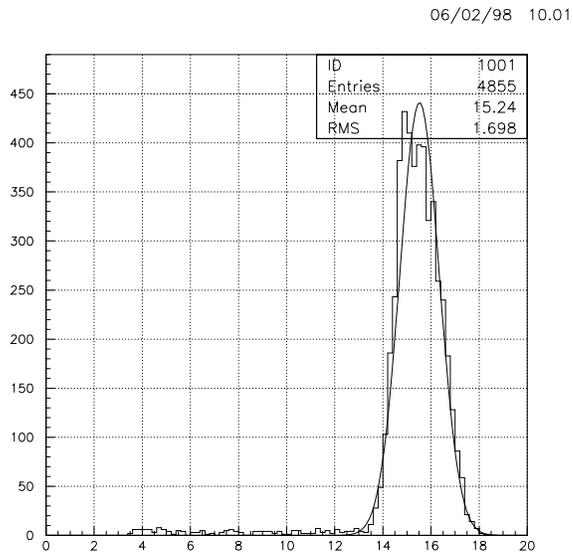


Abbildung 37: Noise von run01295 (310MeV bei 0°) mit zusätzlichem Rauschen. Durch das hinzufügen von gaußischem Rauschen zu den Rohdaten erhält man einen Noise von ungefähr 15.

High Noise Simulation:

Example: Run 1295 (310 MeV/c, 0°)

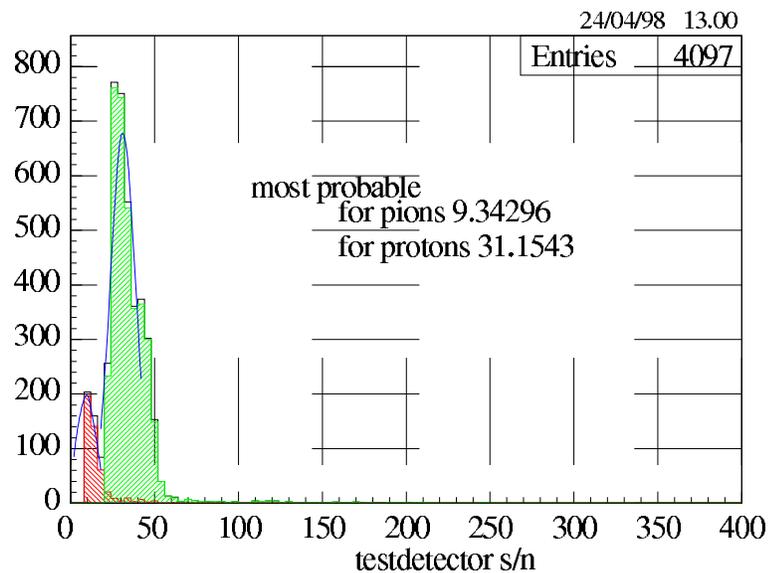


Abbildung 38: Signal/Noise von run01295 (310MeV bei 0°) bei hohem Noise.

Zur Verifizierung der erhaltenen Ergebnisse wurden die einzelnen Strips des Testdetektors mit und ohne Rauschen verglichen. Allgemein wird erwartet, daß die Clusterbreite abnimmt bei höherem Rauschen, da mehr Ereignisse unter den „Threshold“ für Signal/Noise für die Einzelstreifen fallen. Es hat sich gezeigt, daß die Nachbarstreifen vom zentralen Streifen („center strip“) bei den verrauschten Daten sichtbar weniger Einträge hatten als die bei den unverrauschten Daten. Prozessiert man die simulierten Daten so wie bisher die „originalen“ (das heißt mit den selben „Thresholds“), so zeigt sich, daß bei höheren Winkeln viele Pionen „verloren“ gehen, da die Anzahl der Pionen - Ereignisse rapide abnimmt. Das kommt daher, daß die Pionen ein viel geringeres Signal liefern als die Protonen. Daher fallen bei höherem Rauschen mehr Ereignisse unter die geforderten Thresholds. In Abb.(39) sieht man, daß das Signal/Noise Verhältnis für Pionen bei größeren Winkeln kaum noch ansteigt. Selbst bei höheren Winkeln scheinen so viele Randstreifen im Cluster unter die geforderten Thresholds zu fallen, daß der $1/\cos(\phi)$ Anstieg unterdrückt wird. Das Signal der Protonen ist jedoch noch so groß, daß der Anstieg auch bei hohem Noise gegeben ist.

Interessanterweise kann ein Teil der Pionen wieder gefunden werden, wenn man die entsprechenden Werte der Thresholds (thr_{center} , $thr_{neighbour}$, $thr_{cluster}$) verringert. Ein Vergleich der S/N Verhältnisse bei unterschiedlichen Thresholds ist in Abb.(40) zu sehen. Das obere Bild („Testbeam Data“) zeigt die Verteilungen für Protonen und Pionen im Testbeam mit den zuvor festgelegten Standard Thresholds. Im mittleren Bild sieht man das Ergebnis der High Noise Simulation, wenn man diese simulierten Daten mit den selben Thresholds wie bei der „Standard Testbeam“ Analyse auswertet. Die Verteilung für die Pionen hat sich drastisch verändert, nur noch wenige Pion - Ereignisse sind histogrammiert. Die Anzahl der Ereignisse („Entries“ in den Bildern) hat auch um etwa 1000 abgenommen (-25%). Im untersten Bild wurden die High Noise Daten mit niedrigeren Thresholds ausgewertet. Wie man sofort sehen kann, steigt die Zahl der gefundenen Pion Ereignisse wieder deutlich an. Auch die gesamte Anzahl an gefundenen Ereignissen („Entries“) von Pionen und Protonen ist fast so groß wie die in den Testbeam Daten.

S/N vs. Angle@ 310 MeV/c
for High Noise Simulation

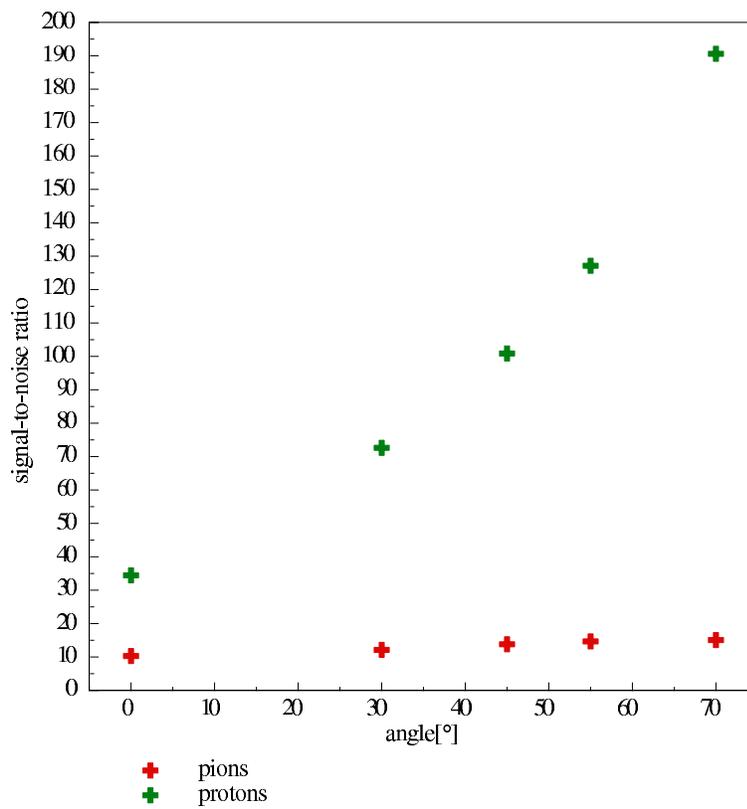


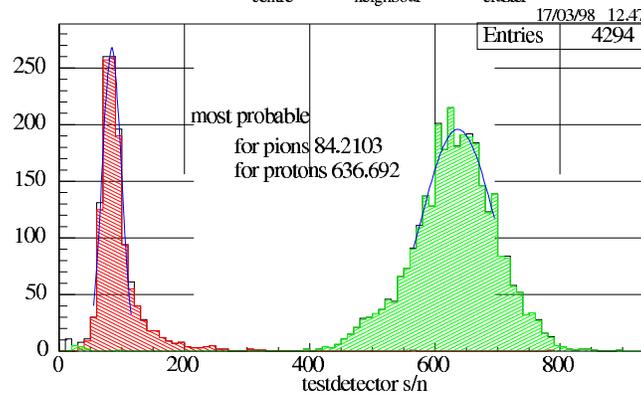
Abbildung 39: Signal/Noise als Funktion des Winkels bei 310MeV/c und hohem Noise.

Comparison of S/N

Example: Run 1291 (310 MeV/c, 55°)

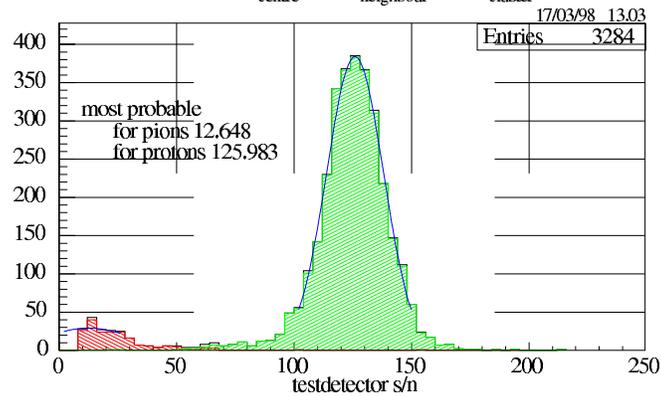
Testbeam Data:

low noise, normal thresholds (s/n: thr_{centre}=6, thr_{neighbour}=3, thr_{cluster}=10)



High Noise Simulation:

high noise, normal thresholds (s/n: thr_{centre}=6, thr_{neighbour}=3, thr_{cluster}=10)



High Noise Simulation with Adapted Thresholds:

high noise, low thresholds (s/n: thr_{centre}=3, thr_{neighbour}=1.5, thr_{cluster}=6)

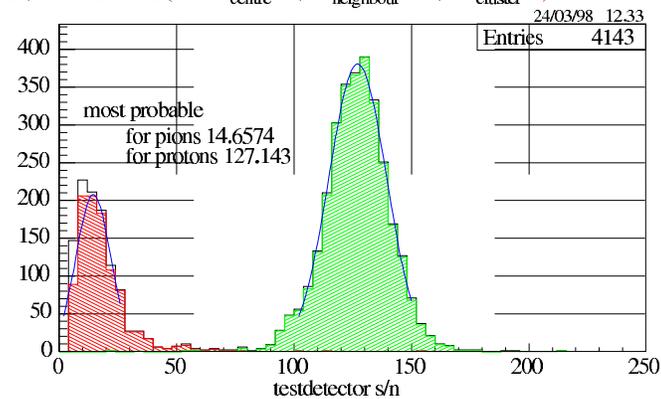


Abbildung 40: Vergleich von Signal/Noise bei run01291 (310MeV/c und 55°).

Um das Verhalten der gefundenen und nicht gefundenen Teilchen bei verschiedenen „Thresholds“ in der High Noise Simulation besser veranschaulichen zu können, wurde eine relative Nachweiswahrscheinlichkeit („relative efficiency“) definiert. Die „relative efficiency“ wurde definiert als

$$\text{rel. Nachweiswahrsch.} = \frac{\text{Anz. d. Pionen} \in \text{Cluster} \geq 1 \text{ in d. Simulation}}{\text{Anz. d. Pionen} \in \text{Cluster} \geq 1 \text{ in Testbeam Daten}}, \quad (120)$$

Man betrachtet also das Verhältnis der Anzahl der Pionen, welche in der High Noise Simulation bei verschiedenen „Thresholds“ gefunden wurden, zu der Anzahl der Pionen, welche in den Teststrahl Daten gefunden wurden. Bei den Protonen ist dieses Verhältnis immer gleich eins, was bedeutet, daß alle Protonen, welche in den Testbeam Daten gesehen wurden, auch in der High Noise Simulation gesehen wurden. Um eine Aussage über eine absolute „efficiency“ des Detektors geben zu können, müßte man die Spuren der Teilchen in den Teleskopdetektoren nachvollziehen können, und dann überprüfen, ob dieses Teilchen auch im Testdetektor gesehen wurden. Da bei den gemessenen Impulsen die Abweichungen der Teilchen von den ursprünglichen Bahnen aber zu groß waren, konnten keine Spuren durch die Teleskopdetektoren gelegt werden, und auch keine absolute „efficiency“ des Testdetektors berechnet werden. Die Anzahl der gefundenen Teilchen (Protonen und Pionen) im Testdetektor im Testbeam und in der High Noise Simulation (einmal mit Testbeam Thresholds, einmal mit verringerten angepaßten Thresholds) ist in den folgenden Tabellen zu sehen.

Anzahl der rekonstruierten Pionen und Protonen bei 310MeV/c und „normalen“ Thresholds		
Testbeam Daten		
Winkel [°]	N($\pi \in \text{Cl.} \geq 1$)	N(p $\in \text{Cl.} \geq 1$)
0	1247	3613
30	873	2626
45	1601	4651
55	1193	3063
70	650	1550
High - Noise Daten		
Winkel [°]	N($\pi \in \text{Cl.} \geq 1$)	N(p $\in \text{Cl.} \geq 1$)
0	460	3624
30	191	2644
45	249	4673
55	191	3069
70	146	1560

Anzahl der rekonstruierten Pionen und Protonen bei 310MeV/c und „niedrigen“ Thresholds		
High - Noise Daten		
Winkel [°]	N($\pi \in \text{Cl.} \geq 1$)	N(p $\in \text{Cl.} \geq 1$)
0	1180	3624
30	754	2662
45	1318	4718
55	978	3128
70	616	1616

Ein graphischer Überblick über die „relative efficiency“ ist in Abb.(41) gezeigt. Während sich für Protonen an der „relative efficiency“ kaum etwas ändert, ist für Pionen ein klarer Unterschied zu erkennen, ob mit „normalen“ Thresholds gearbeitet wird oder mit niedrigen. Verwendet man die „normalen“ Thresholds, um die simulierten Daten auszuwerten, verliert man drastisch an Pionen Ereignissen.

Abschließend zur High Noise Simulation soll noch ein Überblick über die Clusterbreiten bei den Testbeamdaten und der High Noise Simulation gegeben werden (Abb.(42)). Es sind alle vorhandenen Daten für 310MeV/c Teilchenimpuls gezeigt. Bei den Pionen ist zu sehen, daß der geometrisch bedingte Anstieg der Clusterbreite in der High Noise Simulation unterdrückt ist. Bei Verwendung der Testbeam Thresholds zur Auswertung der simulierten Daten steigt die Clusterbreite bei größer werdenden Winkeln von zwei auf nur vier Streifen an, bei verringerten angepaßten Thresholds steigt die Clusterbreite nur bis zu 6 Streifen. Die Clusterbreite der Protonen in der Simulation ändert sich bei steigenden Winkeln nur wenig im Vergleich zu den Testbeamdaten. Im Mittel ist die Breite der Cluster um einen Streifen geringer als bei den echten Daten, unabhängig von den Thresholds.

Comparison of Relative "Efficiency"

Relative "Efficiency" := $\frac{\text{number of clusters found in simulation}}{\text{number of clusters found in real data}}$

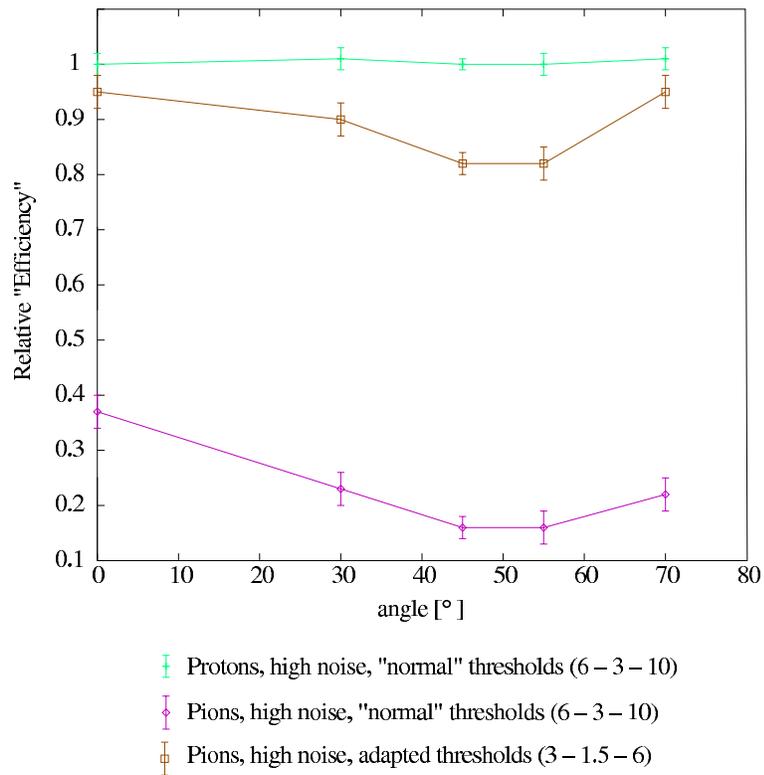
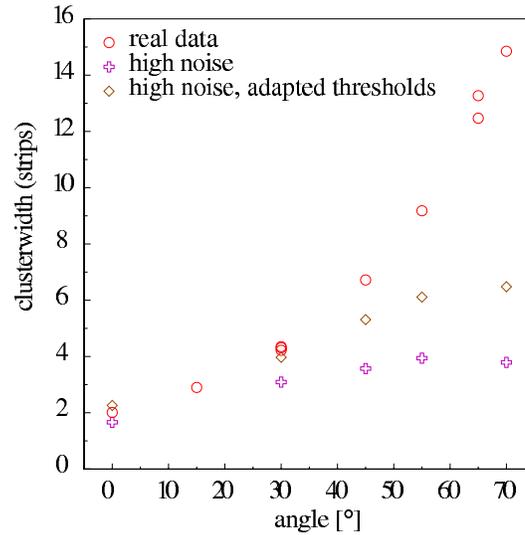


Abbildung 41: Relative Efficiency, erhalten aus den Testbeamdaten und der High Noise Simulation bei 310MeV/c.

Overview: Clusterwidth for Testbeam Data and High Noise Simulations

All data for a beam momentum of 310 MeV.

Pions:



Protons:

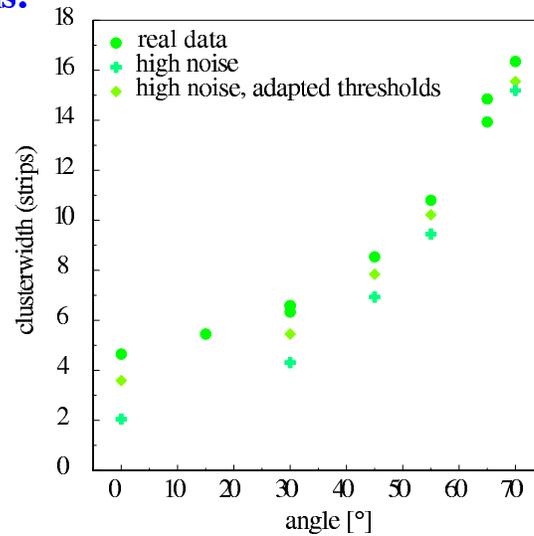


Abbildung 42: Clusterbreiten im Überblick für die Testbeamedaten und die High Noise Simulation bei 310MeV/c.

3.1.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die wichtigsten Ergebnisse aus dem PSI97 Test sollen nocheinmal kurz zusammengefaßt werden:

- Das Signal der Protonen ist bei kleinen Winkeln (bis 30°) so groß, daß der VA2 Auslesechip saturiert ist. Erst bei höheren Winkeln, wenn sich die erzeugte Ladung über mehr Streifen verteilt, kann das Signal vollständig wiedergegeben werden.
- Signal und Clusterbreite verhalten sich, wie man es aus den geometrischen Überlegungen erwartet: Das Signal verhält sich wie

$$\sim \frac{1}{\cos(\phi)},$$

die Clusterbreite wie

$$\sim \sqrt{(a \cdot \tan(\phi))^2 + c^2},$$

mit $a = \frac{\text{Detektordicke}}{\text{Streifenabstand}}$ und c einer Anpassungskonstante.

- Wie aufgrund der geometrischen Überlegungen erwartet, fiel die Anzahl der ansprechenden Streifen pro Ereignis im Detektor sehr groß aus:
 - Die Clusterbreite der Protonen steigt von 4 auf 17 (bei 70°) Streifen.
 - Die Clusterbreite der Pionen steigt von 2 auf 15 (bei 70°) Streifen.

Allerdings war PSI97 der erste Test, welcher das Verhalten von Teilchen unter derart extrem schrägen Winkeln untersuchte. Die Ergebnisse aus diesem Test werden bereits benützt, um die Monte Carlo Simulationen von CMS zu optimieren.

Aus der High Noise Simulation ergeben sich folgende Erkenntnisse:

- Die Clusterbreite der Protonen nimmt im Vergleich zum den Daten aus dem Testbeam kaum ab (ca. 1 Streifen weniger).
- Die Clusterbreite der Pionen nimmt (bei gleichen Thresholds wie bei den Testbeam Daten) nur auf 4 Streifen (bei 70°) zu, also ein deutlicher Unterschied. Außerdem gehen viele Pionen „verloren“.
- Senkt man die Thresholds ab (von (6,3,10) auf (3,1.5,6)), kann ein Teil der Pionen wieder gefunden werden. Die Clusterbreite bleibt aber deutlich niedriger als bei den Testbeamdaten, sie steigt nur bis auf 6 Streifen bei 70° an. Wahrscheinlich kommt es hier zu Clusterzerfällen.

3.2 APV6 - Silizium System Test

3.2.1 Datenanalyse und Ergebnisse

Da der Zeitpunkt des Durchfluges eines Teilchens nur endlich genau bekannt war im Testbeam („trigger - window“ 8ns), kam es bei der Verarbeitung des Signals zu einem Verlust von etwa 4% (berechnet). Pro Zone von 32 Streifen wurde für jedes Ereignis eine „Common Mode Correction“ durchgeführt, was sich als absolut notwendig herausgestellt hat. Die Werte für das Untergrundrauschen („Pedestal“) erhielt man für jede Zone aus einem eigenen „Pedestalrun“, welche bei ausgeschaltetem Strahl aufgenommen wurden (also ohne Teilchenereignisse). Das Signal im Detektor wurde mit zwei unterschiedlichen „depletion voltages“ gemessen: 100V und 150V. Dies war deshalb notwendig, da sich gezeigt hat, daß die Zonen mit 240 μ m pitch bei 100V „depletion voltage“ noch nicht voll „depleted“ waren. Weiters wurden „noisy“ Strips von vornherein bei der Auswertung nicht berücksichtigt (mittels einer „Stripmap“ - Tabelle). Der Algorithmus zur Clusterbildung sah vor, daß zwei Thresholds für den „center-“ und „neighbour strip“ erfüllt sein mußten:

- $\text{threshold}_{center}$ und
- $\text{threshold}_{neighbour}$.

Damit also ein Cluster als solcher erkannt wurde, mußte ein Streifen („center strip“) ein S/N Verhältnis größer oder gleich $\text{threshold}_{center}$ haben. Beginnend von diesem Streifen wurde in beide Richtungen nach Nachbarstreifen (neighbour strips) gesucht, welche das S/N Verhältnis $\text{threshold}_{neighbour}$ erfüllen, und deren S/N Werte zum gesamt - Cluster S/N Verhältnis hinzu addiert. Der Algorithmus brach ab, wenn ein Streifen das S/N Verhältnis $\text{threshold}_{neighbour}$ nicht mehr erfüllte. Nach Auswertungen mit verschiedenen Thresholds wurden schließlich für die gesamte Analyse folgende Thresholds verwendet:

- $\text{threshold}_{center} = 9 \sigma_{noise}$
- $\text{threshold}_{neighbour} = 3 \sigma_{noise}$.

Dazu muß gesagt werden, daß diese Werte optimiert waren für die Zonen 8-11, für die restlichen Zonen sind diese Thresholds zu hoch angesetzt. Von primärem Interesse waren aber die Zonen 8-11, da sie vermutlich das beste Verhältnis von Streifenbreite zu Streifenabstand haben. Breite Streifen haben eine höhere Kapazität und damit ein höheres Rauschen (Noise). Um dies zu verifizieren, wurde dieser Multistreifendetektor getestet. Die Dimensionierung (Streifenabstand / Streifenbreite) der einzelnen Zonen ist noch einmal in der folgenden Tabelle zu sehen:

Hamamatsu Multiregion Detector			
Abstand [μm] / Breite [μm]			
zone 0 60 / 25	zone 1 80 / 40	zone 2 240 / 70	zone 3 120 / 50
zone 4 60 / 20	zone 5 80 / 25	zone 6 240 / 50	zone 7 120 / 35
zone 8 60 / 15	zone 9 80 / 15	zone 10 240 / 30	zone 11 120 / 20

Die gemessenen S/N Werte der einzelnen Zonen bei 100V „depletion voltage“ sind in der nächsten Tabelle zu sehen. Man sieht, wenn man die Zonen mit gleichem Streifenabstand und unterschiedlicher Streifenbreite vergleicht, daß die Zone mit der kleinsten Streifenbreite das beste S/N Verhältnis hat.

S/N Verhältnisse (most probable)			
100V Depletion Voltage			
zone 0 10.9	zone 1 11.2	zone 2 12.9	zone 3 13.0
zone 4 12.5	zone 5 12.3	zone 6 13.8	zone 7 13.8
zone 8 13.0	zone 9 14.2	zone 10 14.4	zone 11 14.2

Die Ergebnisse für 150V „depletion voltage“ sind in der nächsten Tabelle zu sehen. Auch hier zeigt sich das gleiche Ergebnis: Dünnere Streifen haben das bessere S/N Verhältnis.

S/N Verhältnisse (most probable)			
150V Depletion Voltage			
zone 0 n.v.	zone 1 n.v.	zone 2 14.0	zone 3 12.9
zone 4 n.v.	zone 5 n.v.	zone 6 14.4	zone 7 14.1
zone 8 14.0	zone 9 14.2	zone 10 15.3	zone 11 14.3

Beispiele für einige Ergebnisse für Signal/Noise Werte bei 100V sind in Abb.(43), die Ergebnisse der Clusterbreiten bei 100V in Abb.(44) gezeigt. Man sieht, daß die gemessenen Werte für das Signal (wunderschön) landauverteilt sind.

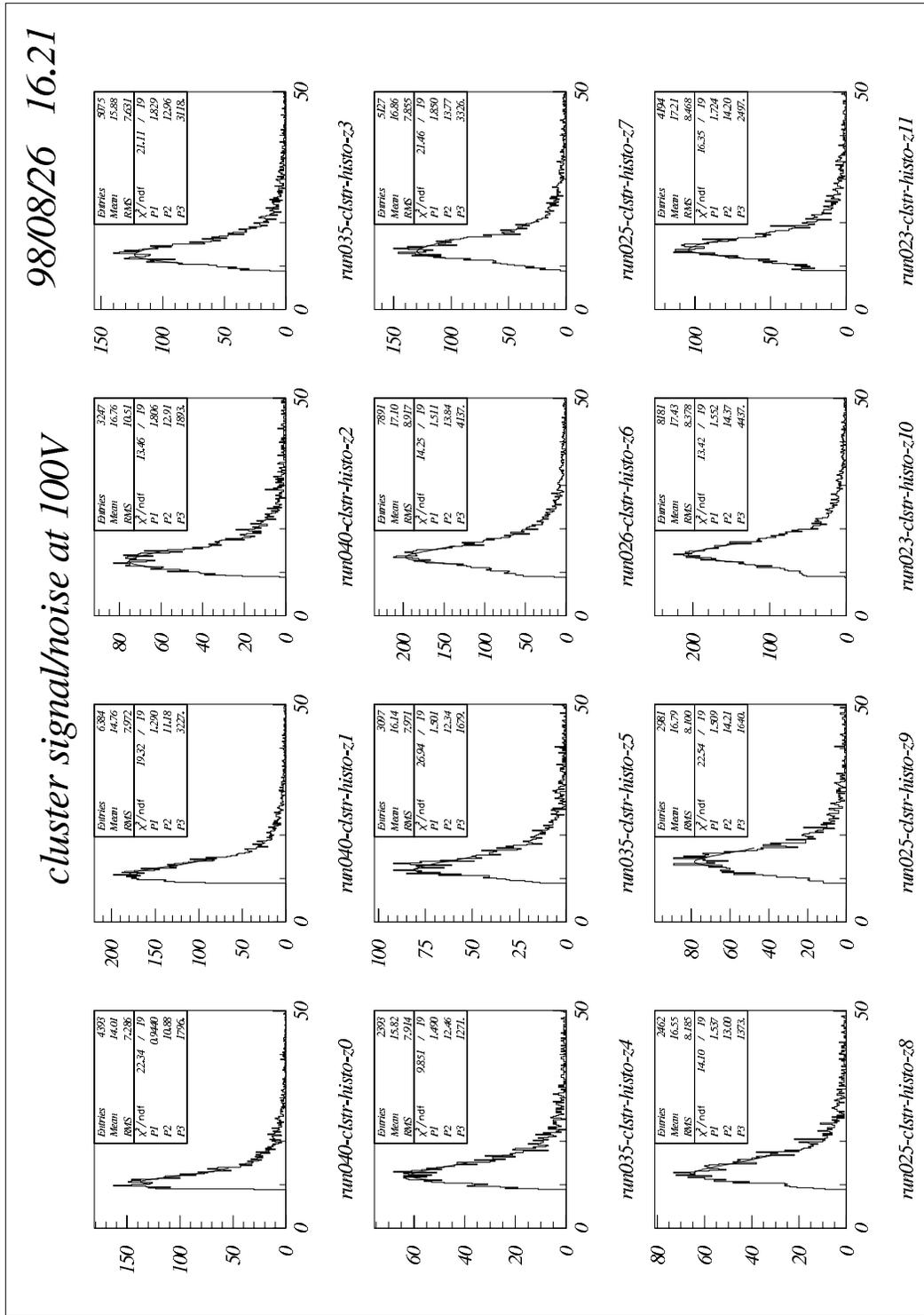


Abbildung 43: Signal/Noise Verhältnisse bei 100V Depletion Voltage.

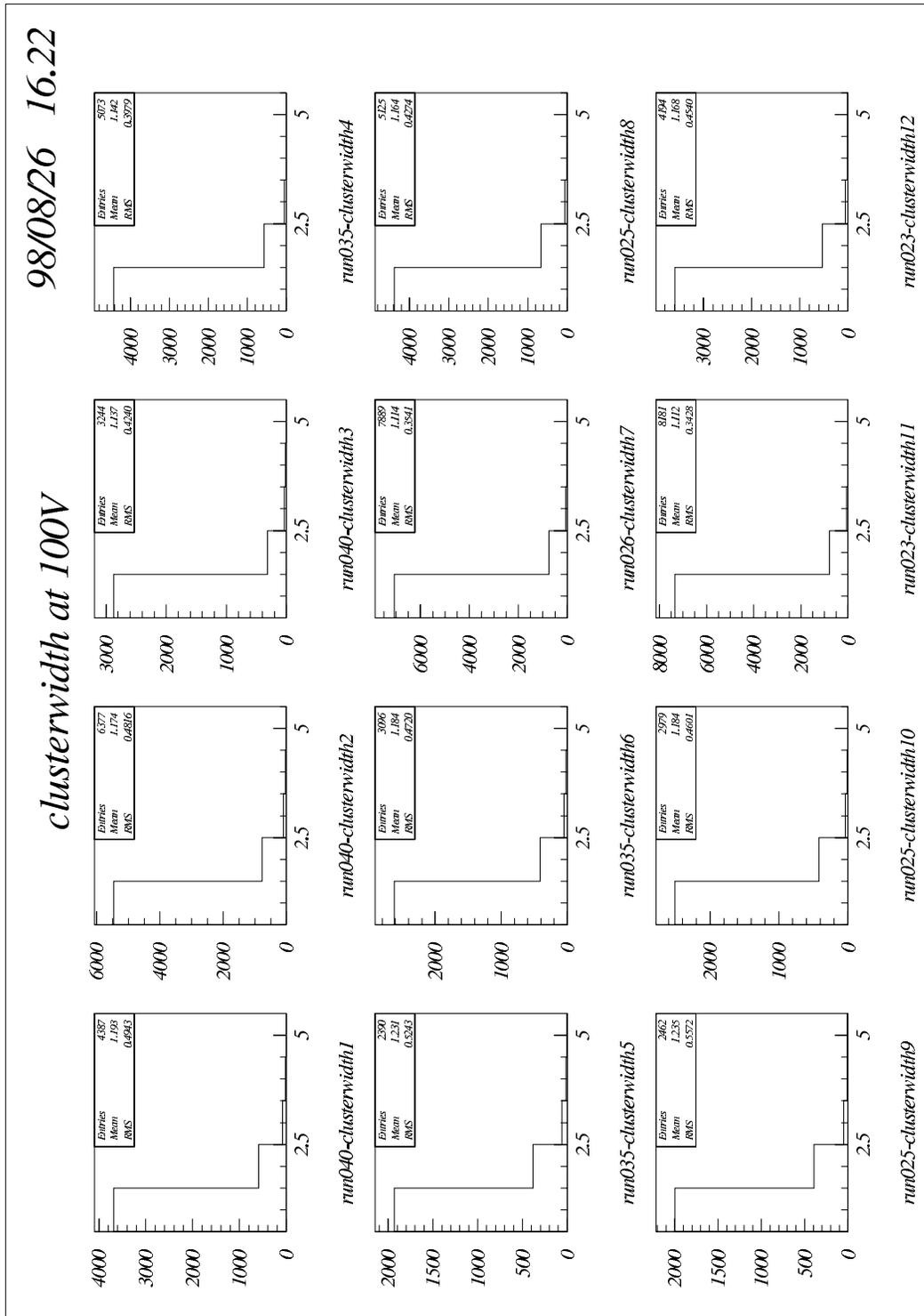


Abbildung 44: Clusterbreiten bei 100V Depletion Voltage.

Es wurde außerdem noch ein kleiner Winkel - Scan der Zonen 5 und 6 durchgeführt (Winkel: 0° , 10° , 20° und 30° , alle 100V). Bei der Analyse stellte sich heraus, daß für diese beiden Zonen die ursprünglichen Thresholds (9/3) zu groß waren. Damit wurde zu stark in die Verteilung der Signale „hineingeschnitten“, und das Signal und S/N stieg scheinbar unverhältnismäßig stark an bei höheren Winkeln, da man Teilchen, welche ein kleineres S/N lieferten, verloren hatte. Es wurden daher folgende Thresholds verwendet:

- $\text{threshold}_{center} = 6 \sigma_{noise}$
- $\text{threshold}_{neighbour} = 3 \sigma_{noise}$.

In Abb.(45) ist die Winkelabhängigkeit des Verhältnisses von Signal/Noise zu sehen. Der Anstieg von Signal und Signal/Noise verhält sich bei der Zone 5 wie erwartet ($\sim 1/\cos(\phi)$). Erstaunlich jedoch das Verhalten von Zone 6, bei der keinerlei Anstieg zu sehen ist. Eine mögliche Erklärung für dieses unerwartete Verhalten kann darin liegen, daß es bei der Zone mit $240\mu\text{m}$ „pitch“ ineffiziente Zone zwischen den Streifen gibt, in denen kein homogenes Feld besteht. Bei senkrechtem Durchgang kann dies zur Folge haben, daß man ein Teilchen ganz sieht (in der Nähe des Streifens) oder gar nicht (zwischen zwei Streifen). Eine genaue Überprüfung dieser Aussage läßt sich nur über die zusätzliche Installation eines Teleskopdetektors machen, da man dann die tatsächliche Anzahl der rekonstruierten Teilchen mit der Anzahl der in dieser Zone gesehenen Teilchen vergleichen kann.

Das Verhalten der Clusterbreite mit steigendem Winkeln der Zone mit $80\mu\text{m}$ Streifenabstand ist in Abb.(46) zu sehen. Der Anstieg verhält sich so wie aus den geometrischen Überlegungen erwartet.

Das Verhalten der Clusterbreite mit steigendem Winkel der Zone 6 mit $240\mu\text{m}$ Streifenabstand ist in Abb.(47) zu sehen. Der Anstieg verhält sich auch hier so wie aus den geometrischen Überlegungen erwartet. Jedoch fällt der Anstieg wesentlich geringer aus als bei der Zone mit $80\mu\text{m}$ Streifenabstand. Die berechneten Kurven für die Clusterbreiten ergeben sich aus geometrischen Überlegungen und sind die selben wie beim PSI97 Test:

$$\text{Clusterbreite} = \sqrt{\left(\frac{\text{Detektordicke}}{\text{Streifenabstand}} \cdot \tan(\phi)\right)^2 + c^2}$$

c ist eine Konstante und ist in etwa die Clusterbreite bei 0° . Wegen dem hohen Streifenabstand (pitch) in Zone 6 wächst die Clusterbreite langsamer an als bei Zone 5.

3.2.2 Zusammenfassung der Ergebnisse

Schlußfolgerung zum APV6 Test:

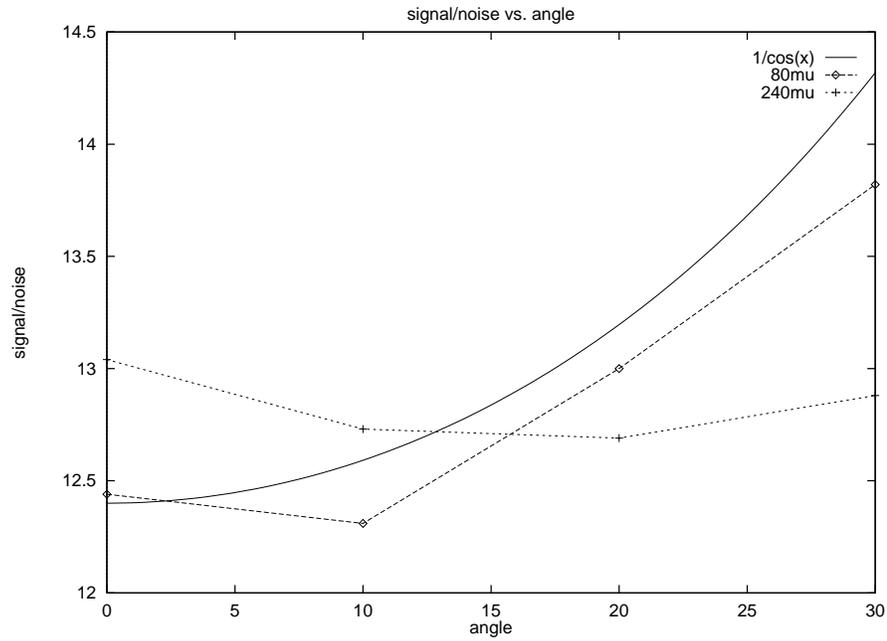


Abbildung 45: Signal/Noise - Winkelabhängigkeit bei 100V Depletion Voltage.

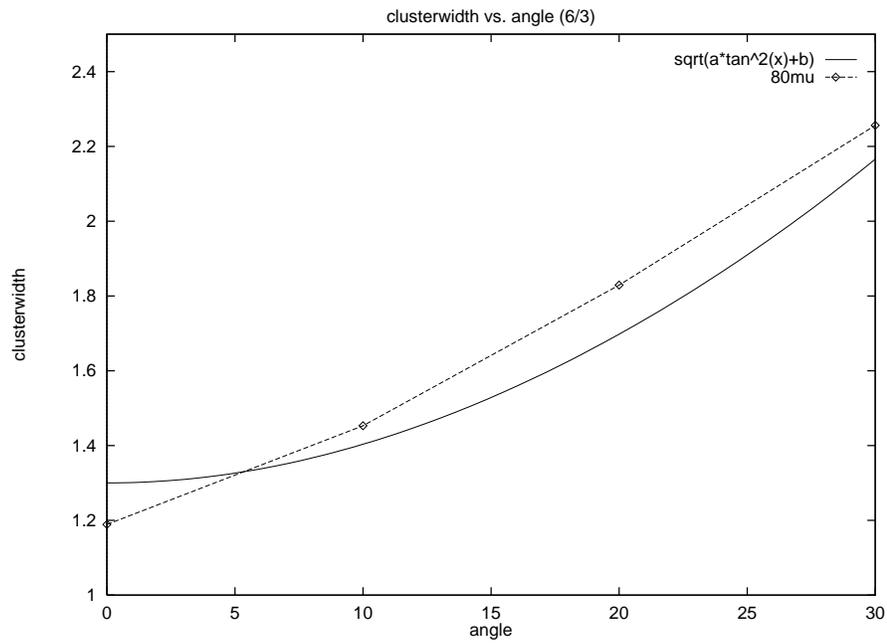


Abbildung 46: Clusterbreite - Winkelabhängigkeit von Zone 5 (80μm pitch) bei 100V Depletion Voltage.

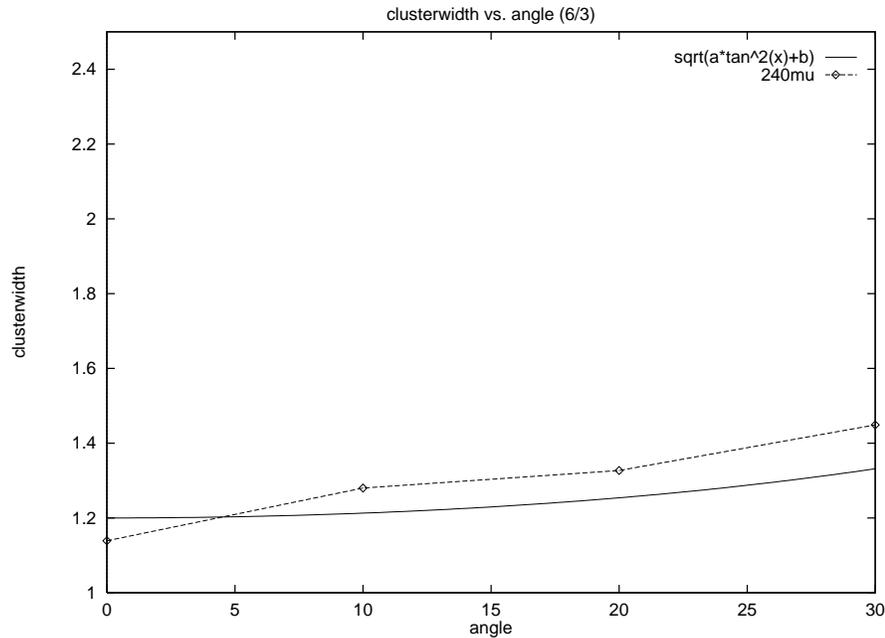


Abbildung 47: Clusterbreite - Winkelabhängigkeit von Zone 6 ($240\mu\text{m}$ pitch) bei 100V Depletion Voltage.

- Das System ist sehr stabil.
- Die Einstellungen für die Elektronik waren noch nicht ganz optimal, Verbesserungen könnten noch ein um einige % besseres S/N Verhältnis bringen.

Schlußfolgerung zum Detektor:

- Eine Common Mode Correction, welche über 32 Streifen geht (und nicht über alle zugleich), ist notwendig.
- Dünne Streifen haben ein besseres S/N Verhältnis als dicke.
- Ein S/N Verhältnis von 13 - 15 (je nach Zone und Depletion Voltage) konnte erreicht werden.
- Die Zonen mit $240\mu\text{m}$ pitch sind bei 100V noch nicht vollständig verarmt.
- Das merkwürdige Verhalten von Zone 6 im Winkelscan muß noch genauer untersucht werden.

4 Diskussion der Ergebnisse von dE/dx

Die aus den beiden Experimenten gewonnenen Daten sollen auf dE/dx der Teilchen untersucht werden und mit den theoretisch vorhergesagten Werten verglichen werden.

4.1 PSI97 Test

Da es für den PSI97 Test keine eigene Kalibration des Detektors gibt, wird hier das Verhältnis

$$\frac{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{protonen}}}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{pionen}}}$$

verglichen. Da der Auslesechip für Protonen und kleine Winkel Sättigungsverhalten zeigte, werden hier die Werte erst ab höheren Winkeln verglichen ($>30^\circ$). Die theoretischen Werte werden mit der in (1.6.2) beschriebenen Formel für den „restricted energyloss“ berechnet, das heißt, so lange

$$\kappa = \frac{(dE/dx) \cdot \Delta x}{W_{max}} \geq 10$$

ist, wird Gl.(72) verwendet. Sinkt κ unter 10, berechnen sich die dE/dx Werte nach Gl.(115). Im Experiment verwendet wurde ein Standard Silizium Streifendetektor mit einer Dicke von

$$\Delta x = 300\mu m = 0.03cm$$

und $W_{upper} = \inf(W_{cut}, W_{max})$, $W_{cut} = W_{max} @ \kappa=10$ in Gl.(115).

In Abb.(48) ist das Verhältnis von Protonen/Pionen bei 45° gezeigt. Die berechneten Werte und Meßwerte stimmen innerhalb der experimentellen Ungenauigkeit gut überein. Die Kurven bei den anderen Winkeln (55° , 65° und 70°) sehen vergleichbar aus. Daher sind im folgenden die Meßwerte und die berechneten Werte dieser Winkel nur in Form von Tabellen angegeben.

(dE/dx) _{p+} /(dE/dx) _{π+} @ 45°				
Impuls	PSI97	Bethe - Bloch	Δ	PSI97/B.B.
270 MeV/c	8.88	8.62	0.26	1.03
310 MeV/c	7.59	7.12	0.47	1.07
405 MeV/c	5.11	4.87	0.24	1.05

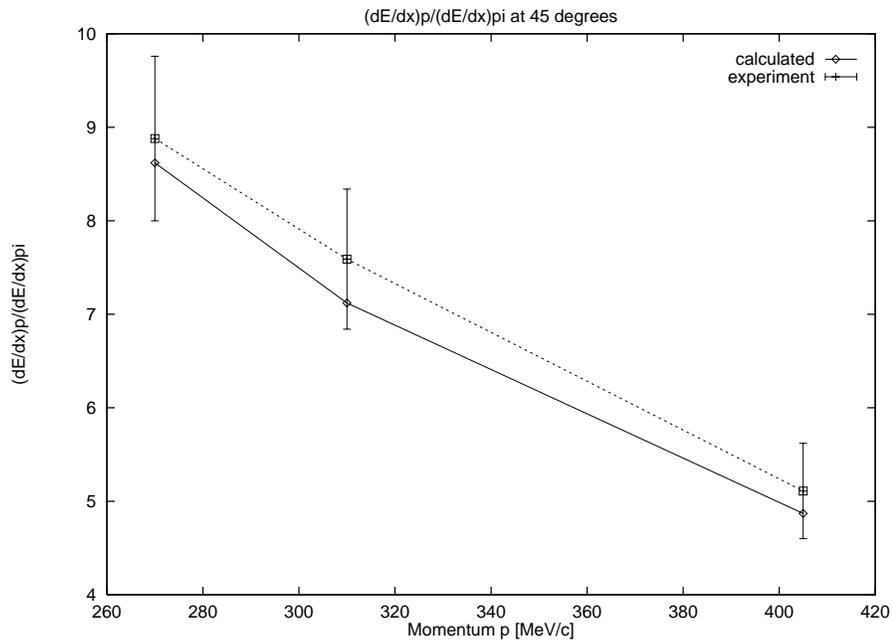


Abbildung 48: Verhältnis Protonen/Pionen bei 45°.

$(dE/dx)_p / (dE/dx)_{\pi^+} @ 55^\circ$				
Impuls	PSI97	Bethe - Bloch	Δ	PSI97/B.B.
270 MeV/c	8.99	8.54	0.26	1.05
310 MeV/c	7.56	7.21	0.35	1.05
405 MeV/c	5.11	4.87	0.24	1.05

$(dE/dx)_p / (dE/dx)_{\pi^+} @ 65^\circ$				
Impuls	PSI97	Bethe - Bloch	Δ	PSI97/B.B.
270 MeV/c	9.19	8.38	0.81	1.09
310 MeV/c	7.48	7.14	0.34	1.05
405 MeV/c	5.13	4.86	0.27	1.06

$(dE/dx)_{p^+}/(dE/dx)_{\pi^+} @ 70^\circ$				
Impuls	PSI97	Bethe - Bloch	Δ	PSI97/B.B.
270 MeV/c	9.39	8.39	1.00	1.12
310 MeV/c	7.45	7.09	0.36	1.05
405 MeV/c	5.23	4.86	0.37	1.08

Zu den Ergebnissen kann noch folgendes gesagt werden:

- Argumentiert man damit, daß die Teilchen bis zum Auftreffen auf den Detektor durch vorangegangene Absorber (Strahlmeßgeräte, Luft etc.) im Durchschnitt 10MeV/c an Impuls verloren haben (entspricht einem Verlust von 2% - 4% je nach Impuls), so stimmen die gemessenen und berechneten Werte bis auf 1% genau überein. Dies würde auch erklären, warum die berechneten Werte tendentiell unter den gemessenen liegen. Leider fehlen entsprechende Informationen zum Setup des Strahls.
- Zweitens muß man bedenken, daß der absolute Winkel zwischen Detektor und Strahl nur auf einige Grad genau ist, während die relativen Winkel zueinander sehr genau eingestellt werden konnten. Ein Hinweis darauf ist dadurch gegeben, daß die Meßwerte der Pionen und Protonen größer waren, wenn man den Detektor von der Rückseite her bestrahlte. Gerade bei hohen Winkeln genügen (wegen der $1/\cos(\phi)$ Abhängigkeit) einige wenige Grade, um einen entsprechenden Unterschied im Signal zu erzeugen, je nachdem ob der Detektor von vorne oder von hinten bestrahlt wurde (und bei gleichen Winkeln). Bei den extremen Winkeln waren aber einige Messungen nur von der Rückseite des Detektors her möglich.
- Der PSI97 Test war nicht dafür ausgelegt, präzise dE/dx Werte zu erhalten, sondern um das Winkelverhalten von niederenergetischen Teilchen zu messen.

Zieht man diese experimentellen Ungenauigkeiten in Betracht, so konnten die Meßergebnisse vom PSI97 Test durch die Theorie (berechnete Werte) sehr genau nachvollzogen werden.

4.2 APV6 - Silizium System

Für den APV6 Test im Juni 1998 (100GeV/c Pionen/Myonen Gemisch) wurde nachträglich eine Kalibration der Elektronik durchgeführt. Dabei wurden

$$346 \frac{e^-}{ADC} \pm 10\%$$

Elektronen pro ADC gemessen. Weiters gilt für einen Silizium Streifendetektor, daß

$$3.6 \frac{eV}{e^-}$$

Elektronenvolt benötigt werden, um ein Elektronen - Loch Paar im Detektor zu erzeugen. Zieht man nun die Daten heran, die man bei 150V Hochspannung am Detektor erhalten hat (bei 100V war der Detektor noch nicht vollständig „depleted“), so erhält man einen mittleren wahrscheinlichsten Wert von

$$24948 \pm 263 \quad (\pm 1.1\%) \quad e^-$$

gemessen Elektronen für 100GeV/c Pionen/Myonen. Die mittlere im Detektor gemessene abgegebene Energie ist demnach

$$\Delta E = 24948 e^- \cdot 3.6 \frac{eV}{e^-} = 89813 eV$$

und der gemessene Energieverlust in 0.03cm Silizium

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{89813 eV}{0.03 cm} \simeq 2.994 \frac{MeV}{cm}.$$

Mit Gl.(115) erhält man für 100GeV/c Pionen/Myonen in 300 μ m Silizium im Mittel

$$\frac{dE}{dx} = 3.081 \frac{MeV}{cm}.$$

Das Verhältnis dE/dx gemessen/berechnet beträgt

$$\frac{dE/dx_{gemessen}}{dE/dx_{berechnet}} = 0.972.$$

Dies entspricht einer Abweichung von nur 2.8% im Mittel. Berücksichtigt man entsprechende Unsicherheiten bei der Kalibration (Genauigkeit $\pm 10\%$), so liegen diese Werte sehr gut beisammen. Die entsprechende Abbildung ist in Abb.(49) zu sehen.

Zusammenfassung: dE/dx von 100GeV/c Pionen/Myonen in 300 μ m Silizium						
$dE/dx_{gemessen}$	$dE/dx_{berechnet}$	$(dE/dx)_{gemessen}/(dE/dx)_{berechnet}$				
2.99 MeV/cm $\pm 10\%$	3.081 MeV/cm	0.972				
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$(dE/dx)_{berechnet}/MIP$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$(dE/dx)_{gemessen}/MIP$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">1.073</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">1.043</td> </tr> </table>			$(dE/dx)_{berechnet}/MIP$	$(dE/dx)_{gemessen}/MIP$	1.073	1.043
$(dE/dx)_{berechnet}/MIP$	$(dE/dx)_{gemessen}/MIP$					
1.073	1.043					

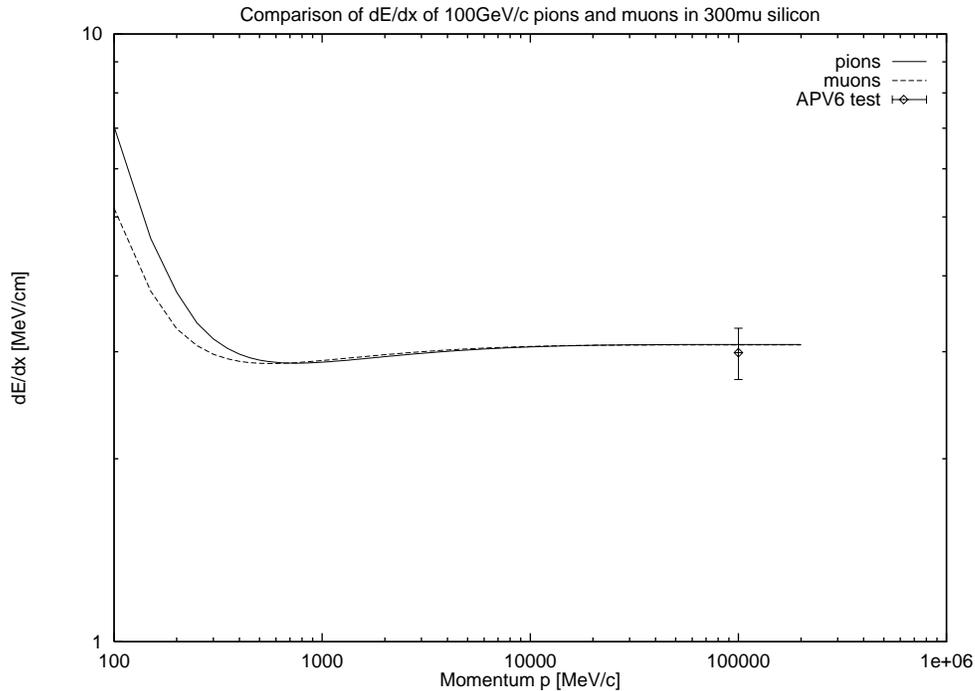


Abbildung 49: Vergleich von dE/dx von $100\text{GeV}/c$ Pionen/Myonen in $300\mu\text{m}$ Silizium.

Beim Test des APV6 wurde mit dem Silizium Streifendetektor ein kleiner Winkelscan durchgeführt. Dabei wurden die Zonen 5 ($80\mu\text{m}$ pitch) und 6 ($240\mu\text{m}$ pitch) untersucht bei Winkeln von 10 , 20 und 30 Grad. Allerdings wurde dabei der Detektor bei 100V Hochspannung betrieben, was zu wenig ist für eine voll ausgebildete Depletion Zone bei der Zone 6. Wie man auch nichts anderes erwartet, ist der Energieverlust unabhängig vom Winkel.

dE/dx Werte [MeV/cm] aus dem Angle Scan				
	0°	10°	20°	30°
Bethe - Bloch	3.071	3.072	3.077	3.085
$80\mu\text{m}$ pitch	2.71	2.68	2.83	3.01
$240\mu\text{m}$ pitch	2.68	2.61	2.60	2.64

Aus dem APV6 Test können folgende den Energieverlust in Silizium Halbleiterdetektoren betreffende Schlußfolgerungen gezogen werden:

- Bei 0° und 150V Depletion Voltage stimmen berechneter und gemessener Wert von dE/dx von Pionen/Myonen in Silizium sehr genau überein (2.8%).

Bei 100V Depletion Voltage war der Detektor nicht voll „depleted“, deshalb wurden diese Werte nicht für den Vergleich verwendet.

- Da der Winkelscan bei 100V Depletion Voltage gemacht wurde, läßt sich keine so genaue Aussage bezüglich dE/dx machen wie bei PSI97. Insbesondere die Zone mit $240\mu\text{m}$ Pitch ist davon betroffen. Das gemessene Signal in der Zone und der Abfall von dE/dx hat andere Gründe, die am Layout dieser Zone liegen müssen und die auch noch nicht voll verstanden worden sind.
- Zu berücksichtigen sind auch die beim Winkelscan verwendeten Thresholds, welche unter jenen liegen, mit denen die restliche Datenanalyse gemacht wurde.
- Nicht zuletzt liegt beim APV6 Test das Verhältnis von Signal/Noise von Pionen/Myonen bei 13 - 15, bei PSI97 bei ca. 150 (alle 0°).

4.3 Schlußfolgerung zu dE/dx in Silizium

Es sollen nocheinmal die wichtigsten Ergebnisse aus dem Vergleich Theorie - Experiment festgehalten werden.

- Der *mittlere* Energieverlust wird durch Gl.(72) beschrieben.
- In Gl.(72) gibt es **kein** Plateau, da für $\beta\gamma \rightarrow \infty$ sich Gl.(72) verhält wie

$$\lim_{\beta\gamma \rightarrow \infty} \frac{dE}{dx} \simeq a + b \cdot \ln(\beta\gamma).$$

Erst die Einführung eines cut - off Parameters für W_{max} bewirkt, daß sich der logarithmische und der δ Term in Gl.(115) auslöschen und ein „echtes“ Plateau entsteht.

- Bei hohen Energien und dünnen Siliziumdetektoren (Standard $300\mu\text{m}$) stimmen gemessene Werte mit Gl.(72) nicht mehr überein, da hochenergetische δ - Elektronen aus dem Detektor austreten können und somit kein Signal im Detektor mehr erzeugen. Gl.(72) liefert dann zu große Werte für die im Detektor verbleibende Energie.
- Gl.(115) berücksichtigt das Entweichen von δ - Elektronen aus dem Detektor, indem ein cut - off Parameter W_{upper} für W_{max} eingeführt wird. Zur Bestimmung von W_{upper} wurden folgende Überlegungen angestellt:
Solange

$$\kappa = \frac{(dE/dx) \cdot \Delta x}{W_{max}} \geq 10$$

gegeben ist, kann Gl.(72) verwenden. Ist κ kleiner als 10, wird mit Gl.(115) gerechnet. Der cut - off Parameter ist dann gegeben durch

$$W_{upper} = \inf(W_{cut}, W_{max}),$$

$$W_{cut} = W_{max} \text{ @ } \kappa=10.$$

- Damit lassen sich die experimentelle Werte (innerhalb der experimentellen Ungenauigkeiten) bei beiden Tests sehr gut nachvollziehen. Zu beachten ist, daß bei PSI97 Probleme mit der Elektronik (Sättigung des Auslesechips) eine genauere Verifizierung bei 0° unmöglich machten.
- Zur Spurrekonstruktion (Multiple Scattering) muß Gl.(72) verwendet werden, da diese ja den *tatsächlichen* Energieverlust eines Teilchens angibt, während Gl.(115) nur den im Detektor *gemessenen* Energieverlust beschreibt.

- Die Höhe des Plateaus ist für Myonen, Pionen und Protonen in $300\mu\text{m}$ Silizium fast gleich und liegt nur etwa 7% über MIP, daher wird im hochenergetischen Bereich (zwischen Minimum und Plateau) Teilchenidentifizierung mit dE/dx nur sehr schwer möglich sein. Mit Gl.(115) erhält man folgende Werte für die Minima und Plateaus:

	dE/dx_{MIP} [MeV/cm]	$dE/dx_{Plateau}$ [MeV/cm]	Plat./MIP
μ	2.869	3.079	1.073
π	2.873	3.083	1.073
p	2.876	3.085	1.073

Literatur

- [1] P. Abreu et al., DELPHI Collaboration, NIM A 378(96) 57.
- [2] J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, 2. Auflage, de Gruyter 1982.
- [3] Hans A. Bethe, *Intermediate Quantum Mechanics*, Third Edition, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Menlo Park, CA 1986.
- [4] Physical Review D, Particles and Fields, Part 1, *Review of Particle Properties*, The American Physical Society 1 August 1994.
- [5] L.D. Landau *On the Energy Loss of fast Particles by Ionisation*, Collected Papers of L.D. Landau, 1.ed. Oxford, Pergamon Press 1965.
- [6] W.R. Leo, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*, Second Revised Edition, Springer - Verlag 1994.
- [7] B. Rossi, *High - Energy Particles*, Prentice-Hall Inc., MIT 1952.
- [8] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band 3: Quantenmechanik, 4. Auflage 1971.
- [9] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band 8: Elektrodynamik der Kontinua, Berlin, Akad.-Verl. 1990.
- [10] S.P. Ahlen, *Theoretical and experimental aspects of the energy loss of relativistic heavily ionizing particles*, Review of Modern Physics, Vol. 52, No. 1, January 1980.
- [11] R.C. Fernow, *Introduction to experimental particle physics*, Cambridge University Press 1986.
- [12] K. Kleinknecht, *Detectors for particle radiation*, Cambridge University Press 1986.
- [13] C. Grupen, *Teilchendetektoren*, Bibliographisches Institut, Mannheim 1993.
- [14] Hans A. Bethe, *Handbuch der Physik - Band 24 (Quantentheorie)*, 1935.
- [15] R.M Sternheimer et al., *Density Effect for Ionization Loss*, Atomic Data and Nuclear Data Tables, Vol. 30, No. 2, March 1984.
- [16] D. Rakoczy, *Summary of the Results from a Low Energy - Large Angle Test-beam*, CMS Tracker Week, 29 April 1998.
- [17] V.V. Balashov, *Interaction of Particles and Radiation with Matter*, Springer Verlag 1993.

- [18] S. Hancock, F. James, J. Movchet, P.G. Rancoita, L. Vanrossum, *Energy-Loss Distributions for Single Particles and Several Particles in a thin Silicon Absorber*, NIM B1 (1984) 1.
- [19] J.F. Janni *Calculations of Energy Loss, Range, Pathlength, Straggling, Multiple Scattering, and the Probability of Inelastic Nuclear Collisions for 0.1- to 1000MeV Protons*, Air Force Weapons Laboratory, Kirtland New Mexico 1966.
- [20] C. Joseph, *Introduction à la Physique Nulcléaire et Corpusculaire*, lecture notes, Lausanne, EPFL 1993 - 1994.
- [21] M. Friedl, *First Testbeam with APV6 - Silicon System*, CMS Tracker Week, July 1998.
- [22] H. Pernegger, *The Silicon Ministrip Detector of the DELPHI Very Forward Tracker*, Dissertation an der TU Wien 1996.